1. Найдите все значения p, при каждом из которых числа $4p+5$, $2p$ и $|p-3|$ являются соответственно первым, вторым и третьим членами некоторой геометрической прогрессии.

Ответ: $p=-1$, $p=\frac{15}{8}$.

Решение. Для того, чтобы указанные числа являлись последовательными членами геометрической прогрессии необходимо и достаточно, чтобы они были ненулевыми и $(2p)^2=(4p+5)|p-3|$. При $p\ge 3$ получаем $4p^2=4p^2-7p-15$, откуда $p=-\frac{15}{7}$ (не подходит). Если $p<3$, то $4p^2=-4p^2+7p+15$, $8p^2-7p-15=0$, следовательно, $p=-1$ или $p=\frac{15}{8}$ (оба корня подходят).

2. Найдите значение выражения $\cos^4\frac{5\pi}{24}+\cos^4\frac{11\pi}{24}+\sin^4\frac{19\pi}{24}+\sin^4\frac{13\pi}{24}$.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Решение. С помощью формул приведения ($\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$) данное выражение можно переписать в виде $\cos^4\frac{5\pi}{24}+\cos^4\frac{11\pi}{24}+\sin^4\frac{5\pi}{24}+\sin^4\frac{11\pi}{24}$. Далее заметим, что

$$\cos^4\gamma+\sin^4\gamma=\left(\cos^4\gamma+2\sin^2\gamma\cos^2\gamma+\sin^4\gamma\right)-2\sin^2\gamma\cos^2\gamma=\left(\cos^2\gamma+\sin^2\gamma\right)^2-\frac{1}{2}\cdot(2\sin\gamma\cos\gamma)^2=$$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\gamma=1-\frac{1}{4}(1-\cos 4\gamma)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4\gamma.$$

Тогда получаем $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos\frac{5\pi}{6}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos\frac{11\pi}{6}=\frac{3}{2}$.

3. В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр $0,1,2,3,4,5,6,7,8$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 45. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 13122.

Решение. Для того чтобы число делилось на 45, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 5 и на 9. Для того чтобы выполнилась делимость на 5, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0 или 5 (2 способа).

Чтобы обеспечить делимость на девять, поступим так. Выберем четыре цифры произвольным образом (это можно сделать $9\cdot9\cdot9\cdot9$ способами), а пятую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 9. Поскольку данные цифры дают все возможные остатки от деления на 9 ($0,1,2,\ldots,8$), и при этом каждый остаток встречается ровно 1 раз, то последнюю цифру можно выбрать одним способом.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $2\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot1=13122$ способа.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+\sqrt{x+2y}-2y=\frac{7}{2}, \\ x^2+x+2y-4y^2=\frac{27}{2}. \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{19}{4};\frac{17}{8}\right)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{x+2y}=u$, $x-2y=v$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} u+v=\frac{7}{2}, \\ u^2v+u^2=\frac{27}{2} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} v=\frac{7}{2}-u, \\ u^2\left(\frac{7}{2}-u\right)+u^2=\frac{27}{2}. \end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы следует, что $2u^3-9u^2+27=0$. Подбирая целый корень $u=3$ и выделяя множитель $(u-3)$ в левой части последнего уравнения, получаем $(u-3)\left(2u^2-3u-9\right)=0$, откуда $u=3$ или $u=-\frac{9}{2}$. Значение $u=-\frac{9}{2}$ не подходит. При $u=3$ получаем $v=\frac{1}{2}$. Тогда

$$\begin{cases} x+2y=9, \\ x-2y=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=\dfrac{19}{2}, \\ 4y=\dfrac{17}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{19}{4}, \\ y=\dfrac{17}{8}. \end{cases}$$

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|y+9|+|x+2|-2)(x^2+y^2-3)=0, \\ (x+2)^2+(y+4)^2=a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

Ответ: $a=9$, $a=23+4\sqrt{15}$.

Решение. Первое уравнение данной системы равносильно совокупности двух уравнений $|y+9|+|x+2|=2$ и $x^2+y^2=3$. Первое из них задаёт квадрат G с центром $(-2;-9)$, диагонали которого равны 4 и параллельны осям координат. Второе задаёт окружность S с центром $(0;0)$ радиуса $\sqrt{3}$.

Второе уравнение исходной системы при $a>0$ задаёт окружность Ω с центром $(-2;-4)$ радиуса $R=\sqrt{a}$ (при $a<0$ пустое множество, при $a=0$ одну точку – в этих случаях трёх решений быть не может).

Окружность Ω имеет с окружностью S одну общую точку при $R=\sqrt{20}\pm\sqrt{3}$, две общие точки при $R\in(\sqrt{20}-\sqrt{3};\sqrt{20}+\sqrt{3})$ и ни одной общей точки при остальных R.

Окружность Ω имеет с квадратом G одну общую точку при $R=3$ или $R=7$, две общие точки при $R\in(3;7)$ и ни одной общей точки при остальных R.

Для того чтобы у системы было три решения, необходимо и достаточно, чтобы окружность Ω имела две общие точки с квадратом G и одну общую точку с окружностью S или наоборот. Рассмотрим значения R, при которых окружность Ω имеет с квадратом G или окружностью S ровно одну общую точку.

1) $R=\sqrt{20}+\sqrt{3}$. Тогда есть одна общая точка с окружностью S и две общие точки с квадратом G (т.к. $3<\sqrt{20}-\sqrt{3}<7$), т.е. у системы 3 решения.
2) $R=\sqrt{20}-\sqrt{3}$. Тогда есть одна общая точка с окружностью S и нет общих точек с квадратом G (т.к. $\sqrt{20}-\sqrt{3}<3$), т.е. у системы 1 решение.
3) $R=3$. Тогда есть одна общая точка с квадратом G и две общие точки с окружностью S (т.к. $\sqrt{20}-\sqrt{3}<3<\sqrt{20}+\sqrt{3}$), т.е. у системы 3 решения.
4) $R=7$. Тогда есть одна общая точка с квадратом G и нет общих точек с окружностью S (т.к. $7>\sqrt{20}+\sqrt{3}$), т.е. у системы 1 решение.

Итак, подходят $R=3$ и $R=\sqrt{20}+\sqrt{3}$. Тогда $a=9$ и $a=23+4\sqrt{15}$.

6. Вокруг равнобедренного остроугольного треугольника NPQ с основанием NQ описана окружность Ω. Точка F – середина дуги PN, не содержащей точки Q. Известно, что расстояния от точки F до прямых PN и QN, равны соответственно 5 и $\dfrac{20}{3}$. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника NPQ.

Ответ: $R=6, S=\dfrac{35\sqrt{35}}{9}$.

Решение. Пусть O – центр окружности, G – точка пересечения отрезков OF и NP (тогда G – середина NP и при этом $OG\perp NP$); PH – высота треугольника ($O\in PH$), FD – перпендикуляр, опущенный из точки F на прямую NQ, OJ – перпендикуляр, опущенный из точки O на прямую FD. Обозначим радиус окружности через R, угол NPH через γ.

Тогда $OG=OP\sin\gamma=R\sin\gamma$, $FG=OF-OG=R-R\sin\gamma$, $FJ=OF\sin\gamma=R\sin\gamma$. Поскольку треугольник OPN равнобедренный ($ON=OP=R$), то $\angle ONP=\angle OPN=\gamma$, и по теореме о внешнем угле треугольника $\angle NOH=2\gamma$. Значит, $OH=ON\cos2\gamma=R\cos2\gamma$, $DJ=OH=R\cos2\gamma$ ($JDHO$ – прямоугольник). Тогда $FD=FJ+JD=R(\sin\gamma+\cos2\gamma)=R(1+\sin\gamma-2\sin^2\gamma)=R(1-\sin\gamma)(1+2\sin\gamma)$.

По условию $R(1-\sin\gamma)=5$, $R(1-\sin\gamma)(1+2\sin\gamma)=\dfrac{20}{3}$. Разделив второе уравнение на первое, получаем $1+2\sin\gamma=\dfrac{4}{3}$, $\sin\gamma=\dfrac{1}{6}$; тогда $R=\dfrac{5}{1-\sin\gamma}=6$.

Находим площадь S треугольника NPQ:

$$S = NH \cdot PH = (NO + OH) \cdot PH = (R + R\cos 2\gamma) R \sin 2\gamma = R^2\, 2\cos^2\gamma \sin 2\gamma = 4R^2 \sin\gamma \cos^3\gamma = 4 \cdot 36 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{35\sqrt{35}}{216} = \frac{35\sqrt{35}}{9}.$$

1. Найдите все значения p, при каждом из которых числа $|p-8|$, $2p-1$ и $4p+5$ являются соответственно первым, вторым и третьим членами некоторой геометрической прогрессии.

Ответ: $p=-1$, $p=\dfrac{39}{8}$.

Решение. Для того, чтобы указанные числа являлись последовательными членами геометрической прогрессии необходимо и достаточно, чтобы они были ненулевыми и $(2p-1)^2=(4p+5)|p-8|$. При $p\ge 8$ получаем $4p^2-4p+1=4p^2-27p-40$, откуда $p=-\dfrac{41}{23}$ (не подходит). Если $p<8$, то $4p^2-4p+1=-4p^2+27p+40$, $8p^2-31p-39=0$, следовательно, $p=-1$ или $p=\dfrac{39}{8}$ (оба корня подходят).

2. Найдите значение выражения $\sin^4\dfrac{\pi}{24}+\cos^4\dfrac{5\pi}{24}+\sin^4\dfrac{19\pi}{24}+\cos^4\dfrac{23\pi}{24}$.

Ответ: $\dfrac{3}{2}$.

Решение. С помощью формул приведения ($\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$) данное выражение можно переписать в виде $\sin^4\dfrac{\pi}{24}+\cos^4\dfrac{5\pi}{24}+\sin^4\dfrac{5\pi}{24}+\sin^4\dfrac{\pi}{24}$. Далее заметим, что

$$\cos^4\gamma+\sin^4\gamma=\left(\cos^4\gamma+2\sin^2\gamma\cos^2\gamma+\sin^4\gamma\right)-2\sin^2\gamma\cos^2\gamma=\left(\cos^2\gamma+\sin^2\gamma\right)^2-\frac{1}{2}\cdot(2\sin\gamma\cos\gamma)^2=$$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\gamma=1-\frac{1}{4}(1-\cos 4\gamma)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4\gamma.$$

Тогда получаем $\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\cos\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\cos\dfrac{5\pi}{6}=\dfrac{3}{2}$.

3. В числе $2*0*1*6*0*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0,1,2,3,4,5,6,7,8$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 18. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 3645.

Решение. Для того чтобы число делилось на 18, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 9. Для того чтобы выполнилась делимость на 2, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0, 2, 4, 6 или 8 (5 способов).

Чтобы обеспечить делимость на девять, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $9\cdot 9\cdot 9$ способами), а четвёртую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 9. Поскольку данные цифры дают все возможные остатки от деления на 9 ($0,1,2,\ldots,8$), и при этом каждый остаток встречается ровно 1 раз, то последнюю цифру можно выбрать одним способом.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $5\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 1=3645$ способов.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} y+\sqrt{y-3x}+3x=12, \\ y^2+y-3x-9x^2=144. \end{cases}$

Ответ: $(-24;72),\left(-\dfrac{4}{3};12\right)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{y-3x}=u$, $y+3x=v$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} u+v=12, \\ u^2v+u^2=144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=12-u, \\ u^2(12-u)+u^2=144. \end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы следует, что $u^3-13u^2+144=0$. Подбирая целый корень $u=4$ и выделяя множитель $(u-4)$ в левой части последнего уравнения, получаем $(u-4)\left(u^2-9u-36\right)=0$, откуда $u=-3$, $u=4$ или $u=12$. Значение $u=-3$ не подходит. При $u=4$ получаем $v=8$. Тогда

$$\begin{cases} y-3x=16, \\ y+3x=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=24, \\ 6x=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{4}{3}, \\ y=12. \end{cases}$$

При $u=12$ получаем $v=0$. Тогда

$$\begin{cases} y-3x=144, \\ y+3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=144, \\ 6x=-144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-24, \\ y=72. \end{cases}$$

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \left(|y-4|+|x+12|-3\right)\left(x^2+y^2-12\right)=0, \\ (x+5)^2+(y-4)^2=a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

Ответ: $a=16$, $a=53+4\sqrt{123}$.

Решение. Первое уравнение данной системы равносильно совокупности двух уравнений $|y-4|+|x+12|=3$ и $x^2+y^2=12$. Первое из них задаёт квадрат G с центром $(-12;4)$, диагонали которого равны 6 и параллельны осям координат. Второе задаёт окружность S с центром $(0;0)$ радиуса $2\sqrt{3}$.

Второе уравнение исходной системы при $a>0$ задаёт окружность Ω с центром $(-5;4)$ радиуса $R=\sqrt{a}$ (при $a<0$ пустое множество, при $a=0$ одну точку – в этих случаях трёх решений быть не может).

Окружность Ω имеет с окружностью S одну общую точку при $R=\sqrt{41}\pm 2\sqrt{3}$, две общие точки при $R\in\left(\sqrt{41}-2\sqrt{3};\sqrt{41}+2\sqrt{3}\right)$ и ни одной общей точки при остальных R.

Окружность Ω имеет с квадратом G одну общую точку при $R=4$ или $R=10$, две общие точки при $R\in(4;10)$ и ни одной общей точки при остальных R.

Для того чтобы у системы было три решения, необходимо и достаточно, чтобы окружность Ω имела две общие точки с квадратом G и одну общую точку с окружностью S или наоборот. Рассмотрим значения R, при которых окружность Ω имеет с квадратом G или окружностью S ровно одну общую точку.

1) $R=\sqrt{41}+2\sqrt{3}$. Тогда есть одна общая точка с окружностью S и две общие точки с квадратом G (т.к. $4<\sqrt{41}+2\sqrt{3}<10$), т.е. у системы 3 решения.
2) $R=\sqrt{41}-2\sqrt{3}$. Тогда есть одна общая точка с окружностью S и нет общих точек с квадратом G (т.к. $\sqrt{41}-2\sqrt{3}<4$), т.е. у системы 1 решение.
3) $R=4$. Тогда есть одна общая точка с квадратом G и две общие точки с окружностью S (т.к. $\sqrt{41}-2\sqrt{3}<4<\sqrt{41}+2\sqrt{3}$), т.е. у системы 3 решения.
4) $R=10$. Тогда есть одна общая точка с квадратом G и нет общих точек с окружностью S (т.к. $10>\sqrt{41}+2\sqrt{3}$), т.е. у системы 1 решение.

Итак, подходят $R=4$ и $R=\sqrt{41}+2\sqrt{3}$. Тогда $a=16$ и $a=53+4\sqrt{123}$.

6. Вокруг равнобедренного остроугольного треугольника FKT с основанием KT описана окружность Ω. Точка M – середина дуги FT, не содержащей точки K. Известно, что расстояния от точки M до прямых KT и FT, равны соответственно $\frac{9}{5}$ и 1. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника FKT.

Ответ: $R=\frac{5}{3}$, $S=\frac{56\sqrt{7}}{25\sqrt{3}}$.

Решение. Пусть O – центр окружности, G – точка пересечения отрезков OM и FT (тогда G – середина FT и при этом $OG\perp FT$); FH – высота треугольника ($O\in FH$), MQ – перпендикуляр, опущенный из точки M на прямую KT, OJ – перпендикуляр, опущенный из точки O на прямую MQ. Обозначим радиус окружности через R, угол TFH через γ.

Тогда $OG=OF\sin\gamma=R\sin\gamma$, $GM=OM-OG=R-R\sin\gamma$, $JM=OM\sin\gamma=R\sin\gamma$. Поскольку треугольник OFT равнобедренный ($OF=OT=R$), то $\angle OTF=\angle OFT=\gamma$, и по теореме о внешнем угле треугольника $\angle TOH=2\gamma$. Значит, $OH=OT\cos 2\gamma=R\cos 2\gamma$, $JQ=OH=R\cos 2\gamma$ ($JQHO$ – прямоугольник). Тогда $MQ=MJ+JQ=R(\sin\gamma+\cos 2\gamma)=R\left(1+\sin\gamma-2\sin^2\gamma\right)=R(1-\sin\gamma)(1+2\sin\gamma)$.

По условию $R(1-\sin\gamma)=1$, $R(1-\sin\gamma)(1+2\sin\gamma)=\frac{9}{5}$. Разделив второе уравнение на первое, получаем $1+2\sin\gamma=\frac{9}{5}$, $\sin\gamma=\frac{2}{5}$; тогда $R=\frac{1}{1-\sin\gamma}=\frac{5}{3}$.

Находим площадь S треугольника FKT:

$$S = FH \cdot HT = \left(FO + OH\right) \cdot HT = \left(R + R\cos 2\gamma\right) R\sin 2\gamma = R^2\, 2\cos^2\gamma \sin 2\gamma = 4R^2 \sin\gamma \cos^3\gamma = 4 \cdot \frac{25}{9} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{21\sqrt{21}}{125} = \frac{56\sqrt{7}}{25\sqrt{3}}.$$

1. Найдите все значения p, при каждом из которых числа $9p+10$, $3p$ и $|p-8|$ являются соответственно первым, вторым и третьим членами некоторой геометрической прогрессии.

Ответ: $p=-1$, $p=\frac{40}{9}$.

Решение. Для того, чтобы указанные числа являлись последовательными членами геометрической прогрессии необходимо и достаточно, чтобы они были ненулевыми и $(3p)^2=(9p+10)|p-8|$. При $p\geq 8$ получаем $9p^2=9p^2-62p-80$, откуда $p=-\frac{40}{31}$ (не подходит). Если $p<8$, то $9p^2=-9p^2+62p+80$, $9p^2-31p-40=0$, следовательно, $p=-1$ или $p=\frac{40}{9}$ (оба корня подходят).

2. Найдите значение выражения $\sin^4\frac{5\pi}{24}+\cos^4\frac{7\pi}{24}+\sin^4\frac{17\pi}{24}+\cos^4\frac{19\pi}{24}$.

Ответ: $\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Решение. С помощью формул приведения ($\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$) данное выражение можно переписать в виде $\sin^4\frac{5\pi}{24}+\cos^4\frac{7\pi}{24}+\sin^4\frac{7\pi}{24}+\cos^4\frac{5\pi}{24}$. Далее заметим, что

$$\cos^4\gamma+\sin^4\gamma=\left(\cos^4\gamma+2\sin^2\gamma\cos^2\gamma+\sin^4\gamma\right)-2\sin^2\gamma\cos^2\gamma=\left(\cos^2\gamma+\sin^2\gamma\right)^2-\frac{1}{2}\cdot(2\sin\gamma\cos\gamma)^2=$$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\gamma=1-\frac{1}{4}(1-\cos 4\gamma)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4\gamma.$$

Тогда получаем $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos\frac{5\pi}{6}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos\frac{7\pi}{6}=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

3. В числе $2*0*1*6*0*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0,1,2,3,4,5,6,7,8$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 10-значное число делилось на 45. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 1458.

Решение. Для того чтобы число делилось на 45, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 5 и на 9. Для того чтобы выполнилась делимость на 5, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0 или 5 (2 способа).

Чтобы обеспечить делимость на девять, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $9\cdot 9\cdot 9$ способами), а четвёртую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 9. Поскольку данные цифры дают все возможные остатки от деления на 9 ($0,1,2,\ldots,8$), и при этом каждый остаток встречается ровно 1 раз, то последнюю цифру можно выбрать одним способом.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $2\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 1=1458$ способов.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases}2x+\sqrt{2x+3y}-3y=5,\\ 4x^2+2x+3y-9y^2=32.\end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{17}{4};\frac{5}{2}\right)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{2x+3y}=u$, $2x-3y=v$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases}u+v=5,\\ u^2v+u^2=32\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=5-u,\\ u^2(5-u)+u^2=32.\end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы следует, что $u^3-6u^2+32=0$. Подбирая целый корень $u=-2$ и выделяя множитель $(u+2)$ в левой части последнего уравнения, получаем $(u+2)\left(u^2-8u+16\right)=0$, откуда $u=-2$ или $u=4$. Значение $u=-2$ не подходит. При $u=4$ получаем $v=1$. Тогда

$$\begin{cases}2x+3y=16,\\ 2x-3y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x=17,\\ 6y=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{17}{4},\\ y=\frac{5}{2}.\end{cases}$$

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|y-10|+|x+3|-2)(x^2+y^2-6)=0, \\ (x+3)^2+(y-5)^2=a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

Ответ: $a=49$, $a=40-4\sqrt{51}$.

Решение. Первое уравнение данной системы равносильно совокупности двух уравнений $|y-10|+|x+3|=2$ и $x^2+y^2=6$. Первое из них задаёт квадрат G с центром $(-3;10)$, диагонали которого равны 4 и параллельны осям координат. Второе задаёт окружность S с центром $(0;0)$ радиуса $\sqrt{6}$.

Второе уравнение исходной системы при $a>0$ задаёт окружность Ω с центром $(-3;5)$ радиуса $R=\sqrt{a}$ (при $a<0$ пустое множество, при $a=0$ одну точку – в этих случаях трёх решений быть не может).

Окружность Ω имеет с окружностью S одну общую точку при $R=\sqrt{34}\pm\sqrt{6}$, две общие точки при $R\in\left(\sqrt{34}-\sqrt{6};\sqrt{34}+\sqrt{6}\right)$ и ни одной общей точки при остальных R.

Окружность Ω имеет с квадратом G одну общую точку при $R=3$ или $R=7$, две общие точки при $R\in(3;7)$ и ни одной общей точки при остальных R.

Для того чтобы у системы было три решения, необходимо и достаточно, чтобы окружность Ω имела две общие точки с квадратом G и одну общую точку с окружностью S или наоборот. Рассмотрим значения R, при которых окружность Ω имеет с квадратом G или окружностью S ровно одну общую точку.

1) $R=\sqrt{34}-\sqrt{6}$. Тогда есть одна общая точка с окружностью S и две общие точки с квадратом G (т.к. $3<\sqrt{34}-\sqrt{6}<7$), т.е. у системы 3 решения.
2) $R=\sqrt{34}+\sqrt{6}$. Тогда есть одна общая точка с окружностью S и нет общих точек с квадратом G (т.к. $\sqrt{34}+\sqrt{6}>7$), т.е. у системы 1 решение.
3) $R=7$. Тогда есть одна общая точка с квадратом G и две общие точки с окружностью S (т.к. $\sqrt{34}-\sqrt{6}<7<\sqrt{34}+\sqrt{6}$), т.е. у системы 3 решения.
4) $R=3$. Тогда есть одна общая точка с квадратом G и нет общих точек с окружностью S (т.к. $3<\sqrt{34}-\sqrt{6}$), т.е. у системы 1 решение.

Итак, подходят $R=7$ и $R=\sqrt{34}-\sqrt{6}$. Тогда $a=49$ и $a=40-4\sqrt{51}$.

6. Вокруг равнобедренного остроугольного треугольника ABC с основанием BC описана окружность Ω. Точка T – середина дуги AC, не содержащей точки B. Известно, что расстояния от точки T до прямых AC и BC, равны соответственно 3 и 7. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника ABC.

Ответ: $R=9, S=40\sqrt{5}$.

Решение. Пусть O – центр окружности, G – точка пересечения отрезков OT и AC (тогда G – середина AC и при этом $OG\perp AC$); AH – высота треугольника ($O\in AH$), TQ – перпендикуляр, опущенный из точки T на прямую BC, OJ – перпендикуляр, опущенный из точки O на прямую TQ. Обозначим радиус окружности через R, угол CAH через γ.

Тогда $OG=OA\sin\gamma=R\sin\gamma$, $GT=OT-OG=R-R\sin\gamma$, $JT=OT\sin\gamma=R\sin\gamma$. Поскольку треугольник OAC равнобедренный ($OA=OC=R$), то $\angle OCA=\angle OAC=\gamma$, и по теореме о внешнем угле треугольника $\angle COH=2\gamma$. Значит, $OH=OC\cos 2\gamma=R\cos 2\gamma$, $JQ=OH=R\cos 2\gamma$ ($JQHO$ – прямоугольник). Тогда $TQ=TJ+JQ=R(\sin\gamma+\cos 2\gamma)=R\left(1+\sin\gamma-2\sin^2\gamma\right)=R(1-\sin\gamma)(1+2\sin\gamma)$.

По условию $R(1-\sin\gamma)=3$, $R(1-\sin\gamma)(1+2\sin\gamma)=7$. Разделив второе уравнение на первое, получаем $1+2\sin\gamma=\frac{7}{3}$, $\sin\gamma=\frac{2}{3}$; тогда $R=\frac{3}{1-\sin\gamma}=9$.

Находим площадь S треугольника ABC:

$$S=AH\cdot HC=(AO+OH)\cdot HC=(R+R\cos 2\gamma)R\sin 2\gamma=R^2 2\cos^2\gamma\sin 2\gamma=4R^2\sin\gamma\cos^3\gamma=4\cdot 81\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5\sqrt{5}}{27}=40\sqrt{5}.$$

1. Найдите все значения p, при каждом из которых числа $|p-3|$, $3p+1$ и $9p+10$ являются соответственно первым, вторым и третьим членами некоторой геометрической прогрессии.

Ответ: $p=-1$, $p=\frac{29}{18}$.

Решение. Для того, чтобы указанные числа являлись последовательными членами геометрической прогрессии необходимо и достаточно, чтобы они были ненулевыми и $(3p+1)^2=(9p+10)|p-3|$. При $p\geq 3$ получаем $9p^2+6p+1=9p^2-17p-30$, откуда $p=-\frac{31}{23}$ (не подходит). Если $p<3$, то $9p^2+6p+1=-9p^2+17p+30$, $18p^2-11p-29=0$, следовательно, $p=-1$ или $p=\frac{29}{18}$ (оба корня подходят).

2. Найдите значение выражения $\cos^4\frac{7\pi}{24}+\sin^4\frac{11\pi}{24}+\sin^4\frac{17\pi}{24}+\cos^4\frac{13\pi}{24}$.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Решение. С помощью формул приведения ($\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$) данное выражение можно переписать в виде $\cos^4\frac{7\pi}{24}+\sin^4\frac{13\pi}{24}+\sin^4\frac{7\pi}{24}+\cos^4\frac{13\pi}{24}$. Далее заметим, что

$$\cos^4\gamma+\sin^4\gamma=\left(\cos^4\gamma+2\sin^2\gamma\cos^2\gamma+\sin^4\gamma\right)-2\sin^2\gamma\cos^2\gamma=\left(\cos^2\gamma+\sin^2\gamma\right)^2-\frac{1}{2}\cdot(2\sin\gamma\cos\gamma)^2=$$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\gamma=1-\frac{1}{4}(1-\cos 4\gamma)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4\gamma.$$

Тогда получаем $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos\frac{7\pi}{6}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos\frac{13\pi}{6}=\frac{3}{2}$.

3. В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 18. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 26244.

Решение. Для того чтобы число делилось на 18, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 9. Для того чтобы выполнилась делимость на 2, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 2, 4, 6 или 8 (4 способа).

Чтобы обеспечить делимость на девять, поступим так. Выберем четыре цифры произвольным образом (это можно сделать $9\cdot9\cdot9\cdot9$ способами), а пятую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 9. Поскольку данные цифры дают все возможные остатки от деления на 9 ($0,1,2,\ldots,8$), и при этом каждый остаток встречается ровно 1 раз, то последнюю цифру можно выбрать одним способом.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $4\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot1=26244$ способов.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases}3x+\sqrt{3x-y}+y=6,\\ 9x^2+3x-y-y^2=36.\end{cases}$

Ответ: $(2;-3),(6;-18)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{3x-y}=u$, $3x+y=v$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases}u+v=6,\\ u^2v+u^2=36\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=6-u,\\ u^2(6-u)+u^2=36.\end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы следует, что $u^3-7u^2+36=0$. Подбирая целый корень $u=-2$ и выделяя множитель $(u+4)$ в левой части последнего уравнения, получаем $(u+2)\left(u^2-9u+18\right)=0$, откуда $u=-2$, $u=3$ или $u=6$. Значение $u=-2$ не подходит. При $u=3$ получаем $v=3$. Тогда

$$\begin{cases}3x-y=9,\\ 3x+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y=-6,\\ 6x=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2,\\ y=-3.\end{cases}$$

При $u=6$ получаем $v=0$. Тогда

$$\begin{cases}3x-y=36,\\ 3x+y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y=-36,\\ 6x=36\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6,\\ y=-18.\end{cases}$$

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(|y+2|+|x-11|-3)(x^2+y^2-13)=0,\\(x-5)^2+(y+2)^2=a\end{cases}$$

имеет ровно три решения.

Ответ: $a=9$, $a=42+2\sqrt{377}$.

Решение. Первое уравнение данной системы равносильно совокупности двух уравнений $|y+2|+|x-11|=3$ и $x^2+y^2=13$. Первое из них задаёт квадрат G с центром $(11;-2)$, диагонали которого равны 6 и параллельны осям координат. Второе задаёт окружность S с центром $(0;0)$ радиуса $\sqrt{13}$.

Второе уравнение исходной системы при $a>0$ задаёт окружность Ω с центром $(5;-2)$ радиуса $R=\sqrt{a}$ (при $a<0$ пустое множество, при $a=0$ одну точку – в этих случаях трёх решений быть не может).

Окружность Ω имеет с окружностью S одну общую точку при $R=\sqrt{29}\pm\sqrt{13}$, две общие точки при $R\in(\sqrt{29}-\sqrt{13};\sqrt{29}+\sqrt{13})$ и ни одной общей точки при остальных R.

Окружность Ω имеет с квадратом G одну общую точку при $R=3$ или $R=9$, две общие точки при $R\in(3;9)$ и ни одной общей точки при остальных R.

Для того чтобы у системы было три решения, необходимо и достаточно, чтобы окружность Ω имела две общие точки с квадратом G и одну общую точку с окружностью S или наоборот. Рассмотрим значения R, при которых окружность Ω имеет с квадратом G или окружностью S ровно одну общую точку.

1) $R=\sqrt{29}+\sqrt{13}$. Тогда есть одна общая точка с окружностью S и две общие точки с квадратом G (т.к. $3<\sqrt{29}+\sqrt{13}<9$), т.е. у системы 3 решения.

2) $R=\sqrt{29}-\sqrt{13}$. Тогда есть одна общая точка с окружностью S и нет общих точек с квадратом G (т.к. $\sqrt{29}-\sqrt{13}<3$), т.е. у системы 1 решение.

3) $R=3$. Тогда есть одна общая точка с квадратом G и две общие точки с окружностью S (т.к. $\sqrt{29}-\sqrt{13}<3<\sqrt{29}+\sqrt{13}$), т.е. у системы 3 решения.

4) $R=9$. Тогда есть одна общая точка с квадратом G и нет общих точек с окружностью S (т.к. $9>\sqrt{29}+\sqrt{13}$), т.е. у системы 1 решение.

Итак, подходят $R=3$ и $R=\sqrt{29}+\sqrt{13}$. Тогда $a=9$ и $a=42+2\sqrt{377}$.

6. Вокруг равнобедренного остроугольного треугольника CLE с основанием LE описана окружность Ω. Точка N – середина дуги CE, не содержащей точки L. Известно, что расстояния от точки N до прямых CE и EL, равны соответственно 6 и 9. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника CLE.

Ответ: $R=8, S=15\sqrt{15}$.

Решение. Пусть O – центр окружности, G – точка пересечения отрезков ON и CE (тогда G – середина CE и при этом $OG\perp CE$); CH – высота треугольника ($O\in CH$), NQ – перпендикуляр, опущенный из точки N на прямую EL, OJ – перпендикуляр, опущенный из точки O на прямую NQ. Обозначим радиус окружности через R, угол ECH через γ.

Тогда $OG=OC\sin\gamma=R\sin\gamma$, $GN=ON-OG=R-R\sin\gamma$, $JN=ON\sin\gamma=R\sin\gamma$. Поскольку треугольник OCE равнобедренный ($OE=OC=R$), то $\angle OEC=\angle OCE=\gamma$, и по теореме о внешнем угле треугольника $\angle EOH=2\gamma$. Значит, $OH=OE\cos2\gamma=R\cos2\gamma$, $JQ=OH=R\cos2\gamma$ ($JQHO$ – прямоугольник). Тогда $NQ=NJ+JQ=R(\sin\gamma+\cos2\gamma)=R(1+\sin\gamma-2\sin^2\gamma)=R(1-\sin\gamma)(1+2\sin\gamma)$.

По условию $R(1-\sin\gamma)=6$, $R(1-\sin\gamma)(1+2\sin\gamma)=9$. Разделив второе уравнение на первое, получаем $1+2\sin\gamma=\frac{3}{2}$, $\sin\gamma=\frac{1}{4}$; тогда $R=\frac{6}{1-\sin\gamma}=8$.

Находим площадь S треугольника CLE:

$$S=CH\cdot EH=(CO+OH)\cdot EC=(R+R\cos2\gamma)R\sin2\gamma=R^2 2\cos^2\gamma\sin2\gamma=4R^2\sin\gamma\cos^3\gamma=4\cdot64\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{15\sqrt{15}}{64}=15\sqrt{15}.$$

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимально возможное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги, при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует выставление положительного балла за задачу.

1.(4) Записано, что $b_2^2 = b_1 b_3$ .... ***1 балл,***
– не сделан отбор .... ***снять 2 балла.***

2.(4) Использована формула $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha = 1 - 0{,}5\sin^2 2\alpha$ .... ***1 балл,***
– применены неверные тригонометрические формулы .... ***0 баллов за все последующие действия.***

3.(6) Указаны все возможные варианты для последней цифры числа .... ***1 балл,***
– за формулировки признаков делимости на 12 (на 75) .... ***баллы не добавляются,***
– при решении перебором получен неверный ответ .... ***не более 1 балла за задачу,***
– ответ записан в виде $9^k \cdot 2$ и т.п. .... ***баллы не снимаются.***

4.(6) Сделана замена переменных (как в решении) .... ***1 балл,***
– получено кубическое уравнение относительно одной из новых переменных .... ***1 балл,***
– решено кубическое уравнение .... ***2 балла,***
– получены посторонние решения .... ***снять 1 балл.***

5.(8) Построено множество точек, удовлетворяющих первому уравнению .... ***2 балла,***
Сверх этого[1]:
– за каждое найденное значение параметра .... ***3 балла,***
– получено 1 лишнее значение параметра .... ***снять 1 балл,***
– получено 2 лишних значения параметра .... ***снять 3 балла.***

6.(7) Найден только радиус или только площадь .... ***5 баллов.***

[1] Если верно построено множество точек, удовлетворяющих первому уравнению, то оценка за задачу не может быть менее 2 баллов.

1. Найдите все значения p, при каждом из которых числа $p-2$, $2\cdot\sqrt{p}$ и $-3-p$ являются соответственно первым, вторым и третьим членами некоторой геометрической прогрессии.

Ответ: $p=1$.

Решение. Для того, чтобы указанные числа являлись последовательными членами геометрической прогрессии необходимо и достаточно, чтобы они были ненулевыми и $\left(2\sqrt{p}\right)^2=(p-2)(-p-3)$, откуда

$$\begin{cases} p>0, \\ p^2+5p-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow p=1.$$

2. Изобразите на плоскости $(x;y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению $\left|16+6x-x^2-y^2\right|+|6x|=16+12x-x^2-y^2$, и найдите площадь полученной фигуры.

Ответ: $25\pi-25\arcsin 0{,}8+12$.

Решение. Заметим, что равенство $|a|+|b|=a+b$ выполняется тогда и только тогда, когда числа a и b неотрицательны (так как если хотя бы одно из них отрицательно, то левая часть больше правой). Поэтому первое уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 16+6x-x^2-y^2\ge 0, \\ 6x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2+y^2\le 25, \\ x\ge 0. \end{cases}$$

Первое неравенство задаёт круг радиуса 5 с центром $(3;0)$, а вся система – часть этого круга, лежащую в полуплоскости $x\ge 0$. Площадь этого сегмента равна разности площади круга и площади сегмента этого круга, находящегося в полуплоскости $x\le 0$. Поскольку центральный угол этого сегмента равен $2\arcsin 0{,}8$, получаем, что его площадь S равна $25\pi-25\arcsin 0{,}8+12$.

3. Найдите значение выражения $\operatorname{tg}20^\circ+4\sin 20^\circ$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

Решение. $\operatorname{tg}20^\circ+4\sin 20^\circ=\dfrac{\sin 20^\circ+4\sin 20^\circ\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}=\dfrac{\sin 20^\circ+2\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ}=\dfrac{\left(\sin 20^\circ+\sin 40^\circ\right)+\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ}=$

$=\dfrac{2\sin 30^\circ\cos 10^\circ+\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ}=\dfrac{\cos 10^\circ+\cos 50^\circ}{\cos 20^\circ}=\dfrac{2\cos 20^\circ\cos 30^\circ}{\cos 20^\circ}=\sqrt{3}$.

4. В числе $2016{*}{*}{*}{*}02{*}{*}$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр $0,2,4,5,7,9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 5184.

Решение. Для того чтобы число делилось на 15, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 5 и на 3. Для того, чтобы выполнилась делимость на 5, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0 или 5 (2 способа).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем четыре цифры произвольным образом (это можно сделать $6\cdot6\cdot6\cdot6$ способами), а пятую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 9), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 5), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $2\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot2=5184$ способа.

5. Найдите все пары *положительных* чисел (x,y), удовлетворяющих системе уравнений $\begin{cases} y-2\sqrt{xy}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}+2=0, \\ 3x^2y^2+y^4=84. \end{cases}$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{3};3\right)$, $\left(\sqrt[4]{\dfrac{21}{76}};2\cdot\sqrt[4]{\dfrac{84}{19}}\right)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{\dfrac{y}{x}}=u$, $\sqrt{xy}=v$ (при этом $u>0$, $v>0$). Тогда $uv=\sqrt{\dfrac{y}{x}}\cdot\sqrt{xy}=\sqrt{y^2}=|y|=y$,

$\frac{v}{u}=\sqrt{xy}:\sqrt{\frac{y}{x}}=\sqrt{x^2}=|x|=x$, так как по условию x и y положительны. Система принимает вид

$$\begin{cases} uv-2v-u+2=0, \\ 3v^4+u^4v^4=84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (v-1)(u-2)=0, \\ 3v^4+u^4v^4=84. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $v=1$ или $u=2$.

Если $v=1$, то $3+u^4=84$, откуда $u=3$; тогда $x=\frac{v}{u}=\frac{1}{3}$, $y=uv=3$.

Если $u=2$, то $3v^4+16v^4=84$, откуда $v=\sqrt[4]{\frac{84}{19}}$; тогда $x=\frac{v}{u}=\sqrt[4]{\frac{21}{76}}$, $y=uv=2\cdot\sqrt[4]{\frac{84}{19}}$.

6. Вокруг равнобедренного остроугольного треугольника NPQ с основанием NQ описана окружность Ω. Расстояние от середины дуги PN, не содержащей точки Q, до стороны PN равно 4, а расстояние от середины дуги QN, не содержащей точки P, до стороны QN равно $0{,}4$. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника NPQ.

Ответ: $R=5, S=\frac{192\sqrt{6}}{25}$.

Решение. Пусть C и D – середины дуг NP и NQ; A и H – середины отрезков PN и NQ; O – центр окружности Ω, R – её радиус. Тогда $OC\perp PN$, $OD\perp QN$; $OA=OC-AC=R-4$, $OH=OD-DH=R-\frac{2}{5}$.

Из теоремы Пифагора для треугольников OAN и OHN получаем, что $AN^2=R^2-(R-4)^2=8R-16$, $ND^2=R^2-\left(R-\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4R}{5}-\frac{4}{25}$. Находим стороны треугольника PNH: $PH=PO+OH=2R-\frac{2}{5}$, $PN=2AN=2\sqrt{8R-16}$, $NH=\sqrt{\frac{4R}{5}-\frac{4}{25}}$.

По теореме Пифагора для треугольника PNH получаем $\left(2R-\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{4R}{5}-\frac{4}{25}\right)=32R-64$, откуда $5R^2-41R+80=0$, $R=5$ или $R=\frac{16}{5}$. Подходит только $R=5$ (во втором случае $AO=R-4<0$).

Значит, $PH=\frac{48}{5}$, $DH=\frac{4\sqrt{6}}{5}$, $S_{NPQ}=PH\cdot NH=\frac{192\sqrt{6}}{25}$.

1. Найдите все значения p, при каждом из которых числа $-p-12$, $2\cdot\sqrt{p}$ и $p-5$ являются соответственно первым, вторым и третьим членами некоторой геометрической прогрессии.

Ответ: $p=4$.

Решение. Для того, чтобы указанные числа являлись последовательными членами геометрической прогрессии необходимо и достаточно, чтобы они были ненулевыми и $\left(2\sqrt{p}\right)^2=(-p-12)(p-5)$, откуда

$$\begin{cases} p>0, \\ p^2+11p-60=0 \end{cases} \Leftrightarrow p=4.$$

2. Изобразите на плоскости $(x;y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению $\left|9+8y-x^2-y^2\right|+|8y|=16y+9-x^2-y^2$, и найдите площадь полученной фигуры.

Ответ: $25\pi-25\arcsin 0{,}6+12$.

Решение. Заметим, что равенство $|a|+|b|=a+b$ выполняется тогда и только тогда, когда числа a и b неотрицательны (так как если хотя бы одно из них отрицательно, то левая часть больше правой). Поэтому первое уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 9+8y-x^2-y^2\geq 0, \\ 8y\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-4)^2+x^2\leq 25, \\ y\geq 0. \end{cases}$$

Первое неравенство задаёт круг радиуса 5 с центром $(0;4)$, а вся система – часть этого круга, лежащую в полуплоскости $y\geq 0$. Площадь этого сегмента равна разности площади круга и площади сегмента этого круга, находящегося в полуплоскости $y\leq 0$. Поскольку центральный угол этого сегмента равен $2\arcsin 0{,}6$, получаем, что его площадь S равна $25\pi-25\arcsin 0{,}6+12$.

3. Найдите значение выражения $4\sin 40^\circ-\operatorname{tg} 40^\circ$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

Решение. $4\sin 40^\circ-\operatorname{tg} 40^\circ=\dfrac{4\sin 40^\circ\cos 40^\circ-\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ}=\dfrac{2\sin 80^\circ-\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ}=\dfrac{\left(\sin 80^\circ-\sin 40^\circ\right)+\sin 80^\circ}{\cos 40^\circ}=$

$=\dfrac{2\sin 20^\circ\cos 60^\circ+\sin 80^\circ}{\cos 40^\circ}=\dfrac{\sin 20^\circ+\sin 80^\circ}{\cos 40^\circ}=\dfrac{2\sin 50^\circ\cos 30^\circ}{\cos 40^\circ}=\sqrt{3}$.

4. В числе $2016{*}{*}{*}{*}02{*}$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0,2,4,6,7,8$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 2160.

Решение. Для того чтобы число делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3. Для того, чтобы выполнилась делимость на 2, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать $0, 2, 4, 6, 8$ (5 способов).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $6\cdot 6\cdot 6$ способами), а четвёртую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 6), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 8), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $5\cdot 6\cdot 6\cdot 6\cdot 2=2160$ способов.

5. Найдите все пары *положительных* чисел (x,y), удовлетворяющих системе уравнений $\begin{cases} x-3\sqrt{xy}-2\sqrt{\dfrac{x}{y}}+6=0, \\ x^2y^2+x^4=82. \end{cases}$

Ответ: $\left(3;\dfrac{1}{3}\right),\left(\sqrt[4]{66};\dfrac{4}{\sqrt[4]{66}}\right)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{\dfrac{x}{y}}=u$, $\sqrt{xy}=v$ (при этом $u>0$, $v>0$). Тогда $uv=\sqrt{\dfrac{x}{y}}\cdot\sqrt{xy}=\sqrt{x^2}=|x|=x$,

$\frac{v}{u}=\sqrt{xy}:\sqrt{\frac{x}{y}}=\sqrt{y^2}=|y|=y$, так как по условию x и y положительны. Система принимает вид

$$\begin{cases} uv-3v-2u+6=0, \\ v^4+u^4v^4=82 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (v-2)(u-3)=0, \\ v^4+u^4v^4=82. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $v=2$ или $u=3$.

Если $v=2$, то $16+16u^4=82$, откуда $u=\frac{\sqrt[4]{66}}{2}$; тогда $y=\frac{v}{u}=\frac{4}{\sqrt[4]{66}}$, $x=uv=\sqrt[4]{66}$.

Если $u=3$, то $v^4+81v^4=82$, откуда $v=1$; тогда $y=\frac{v}{u}=\frac{1}{3}$, $x=uv=3$.

6. Вокруг равнобедренного остроугольного треугольника ADE с основанием AD описана окружность Ω. Расстояние от середины дуги DE, не содержащей точки A, до стороны DE равно 5, а расстояние от середины дуги AD, не содержащей точки E, до стороны AD равно $\frac{1}{3}$. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника ADE.

Ответ: $R=6$, $S=\frac{35\sqrt{35}}{9}$.

Решение. Пусть M и T – середины дуг AD и DE; B и H – середины отрезков DE и AD; O – центр окружности Ω, R – её радиус. Тогда $OT\perp DE$, $OM\perp AD$; $OB=OT-TB=R-5$, $OH=OM-MH=R-\frac{1}{3}$.

Из теоремы Пифагора для треугольников OBD и OHD получаем, что $BD^2=R^2-(R-5)^2=10R-25$, $HD^2=R^2-\left(R-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2R}{3}-\frac{1}{9}$. Находим стороны треугольника DEH: $EH=EO+OH=2R-\frac{1}{3}$, $DE=2BD=2\sqrt{10R-25}$, $DH=\sqrt{\frac{2R}{3}-\frac{1}{9}}$.

По теореме Пифагора для треугольника PNH получаем $\left(2R-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2R}{3}-\frac{1}{9}\right)=40R-100$, откуда $6R^2-61R+150=0$, $R=6$ или $R=\frac{25}{6}$. Подходит только $R=6$ (во втором случае $BO=R-5<0$).

Значит, $EH=\frac{35}{3}$, $DH=\frac{\sqrt{35}}{3}$, $S_{ADE}=DH\cdot EH=\frac{35\sqrt{35}}{9}$.

1. Найдите все значения p, при каждом из которых числа $p-2$, $3\cdot\sqrt{p}$ и $-8-p$ являются соответственно первым, вторым и третьим членами некоторой геометрической прогрессии.

Ответ: $p=1$.

Решение. Для того, чтобы указанные числа являлись последовательными членами геометрической прогрессии необходимо и достаточно, чтобы они были ненулевыми и $\left(3\sqrt{p}\right)^2=(p-2)(-8-p)$, откуда

$$\begin{cases} p>0, \\ p^2+15p-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow p=1.$$

2. Изобразите на плоскости $(x;y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению $\left|9-x^2-y^2-2y\right|+|-2y|=9-x^2-y^2-4y$, и найдите площадь полученной фигуры.

Ответ: $S=10\pi+3-10\operatorname{arctg}3$.

Решение. Заметим, что равенство $|a|+|b|=a+b$ выполняется тогда и только тогда, когда числа a и b неотрицательны (так как если хотя бы одно из них отрицательно, то левая часть больше правой). Поэтому первое уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 9-x^2-y^2-2y\ge 0, \\ -2y\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y+1)^2+x^2\le 10, \\ y\le 0. \end{cases}$$

Первое неравенство задаёт круг радиуса $\sqrt{10}$ с центром $(0;-1)$, а вся система – часть этого круга, лежащую в полуплоскости $y\le 0$. Площадь этого сегмента равна разности площади круга и площади сегмента этого круга, находящегося в полуплоскости $y\ge 0$. Поскольку центральный угол этого сегмента равен $2\operatorname{arctg}3$, получаем, что его площадь S равна $10\pi+3-10\operatorname{arctg}3$.

3. Найдите значение выражения $\operatorname{ctg}70^\circ+4\cos 70^\circ$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

Решение. $\operatorname{ctg}70^\circ+4\cos 70^\circ=\dfrac{\cos 70^\circ+4\sin 70^\circ\cos 70^\circ}{\sin 70^\circ}=\dfrac{\cos 70^\circ+2\sin 140^\circ}{\sin 70^\circ}=\dfrac{\left(\cos 70^\circ+\cos 50^\circ\right)+\cos 50^\circ}{\sin 70^\circ}=$

$$=\frac{2\cos 60^\circ\cos 10^\circ+\cos 50^\circ}{\cos 20^\circ}=\frac{\cos 10^\circ+\cos 50^\circ}{\cos 20^\circ}=\frac{2\cos 20^\circ\cos 30^\circ}{\cos 20^\circ}=\sqrt{3}.$$

4. В числе $2016{*}{*}{*}{*}02{*}$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0,2,4,5,7,9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 15. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 864.

Решение. Для того чтобы число делилось на 15, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 5 и на 3. Для того, чтобы выполнилась делимость на 5, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0 или 5 (2 способа).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $6\cdot6\cdot6$ способами), а четвёртую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 9), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 5), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $2\cdot6\cdot6\cdot6\cdot2=864$ способа.

5. Найдите все пары *положительных* чисел (x,y), удовлетворяющих системе уравнений $\begin{cases} 2x-\sqrt{xy}-4\sqrt{\dfrac{x}{y}}+2=0, \\ 2x^2+x^2y^4=18y^2. \end{cases}$

Ответ: $(2;2),\left(\dfrac{\sqrt[4]{286}}{4};\sqrt[4]{286}\right)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{\dfrac{x}{y}}=u$, $\sqrt{xy}=v$ (при этом $u>0$, $v>0$). Тогда $uv=\sqrt{\dfrac{x}{y}}\cdot\sqrt{xy}=\sqrt{x^2}=|x|=x$,

$\frac{v}{u} = \sqrt{xy} : \sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{y^2} = |y| = y$, так как по условию x и y положительны. Система принимает вид

$$\begin{cases} 2uv - v - 4u + 2 = 0, \\ 2u^2v^2 + \frac{v^6}{u^2} = \frac{18v^2}{u^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (v-2)(2u-1) = 0, \\ v^4 + 2u^4 = 18. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $v = 2$ или $u = \frac{1}{2}$.

Если $v = 2$, то $16 + 2u^4 = 18$, откуда $u = 1$; тогда $y = \frac{v}{u} = 2$, $x = uv = 2$.

Если $u = \frac{1}{2}$, то $v^4 + \frac{1}{8} = 18$, откуда $v = \frac{\sqrt[4]{286}}{2}$; тогда $y = \frac{v}{u} = \sqrt[4]{286}$, $x = uv = \frac{\sqrt[4]{286}}{4}$.

6. Вокруг равнобедренного остроугольного треугольника BCD с основанием CD описана окружность Ω. Расстояние от середины дуги BD, не содержащей точки C, до стороны BD равно 3, а расстояние от середины дуги CD, не содержащей точки B, до стороны CD равно $0{,}5$. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника BCD.

Ответ: $R = 4$, $S = \frac{15\sqrt{15}}{4}$.

Решение. Пусть Q и T – середины дуг CD и BD; A и H – середины отрезков BD и CD; O – центр окружности Ω, R – её радиус. Тогда $OT \perp BD$, $OQ \perp CD$; $OA = OT - TA = R - 3$, $OH = OQ - QH = R - \frac{1}{2}$.

Из теоремы Пифагора для треугольников OAD и OHD получаем, что $AD^2 = R^2 - (R-3)^2 = 6R - 9$, $HD^2 = R^2 - \left(R - \frac{1}{2}\right)^2 = R - \frac{1}{4}$. Находим стороны треугольника BDH: $BH = BO + OH = 2R - \frac{1}{2}$, $BD = 2AD = 2\sqrt{6R-9}$, $DH = \sqrt{R - \frac{1}{4}}$.

По теореме Пифагора для треугольника BDH получаем $\left(2R - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(R - \frac{1}{4}\right) = 24R - 36$, откуда $4R^2 - 25R + 36 = 0$, $R = 4$ или $R = \frac{9}{4}$. Подходит только $R = 4$ (во втором случае $AO = R - 3 < 0$).

Значит, $BH = \frac{15}{2}$, $DH = \frac{\sqrt{15}}{2}$, $S_{BCD} = DH \cdot BH = \frac{15\sqrt{15}}{4}$.

1. Найдите все значения p, при каждом из которых числа $-p-8$, $3\cdot\sqrt{p}$ и $p-7$ являются соответственно первым, вторым и третьим членами некоторой геометрической прогрессии.

Ответ: $p=4$.

Решение. Для того, чтобы указанные числа являлись последовательными членами геометрической прогрессии необходимо и достаточно, чтобы они были ненулевыми и $\left(3\sqrt{p}\right)^2=(-p-8)(p-7)$, откуда

$$\begin{cases} p>0, \\ p^2+10p-56=0 \end{cases} \Leftrightarrow p=4.$$

2. Изобразите на плоскости $(x;y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению $\left|4-2x-x^2-y^2\right|+|-2x|=4-4x-x^2-y^2$, и найдите площадь полученной фигуры.

Ответ: $S=5\pi-5\pi\operatorname{arctg}2+2$.

Решение. Заметим, что равенство $|a|+|b|=a+b$ выполняется тогда и только тогда, когда числа a и b неотрицательны (так как если хотя бы одно из них отрицательно, то левая часть больше правой). Поэтому первое уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 4-2x-x^2-y^2\ge 0, \\ -2x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2+y^2\le 5, \\ x\le 0. \end{cases}$$

Первое неравенство задаёт круг радиуса $\sqrt{5}$ с центром $(-1;0)$, а вся система – часть этого круга, лежащую в полуплоскости $x\le 0$. Площадь этого сегмента равна разности площади круга и площади сегмента этого круга, находящегося в полуплоскости $x\ge 0$. Поскольку центральный угол этого сегмента равен $2\operatorname{arctg}2$, получаем, что его площадь S равна $5\pi-5\operatorname{arctg}2+2$.

3. Найдите значение выражения $\operatorname{ctg}50^\circ-4\cos 50^\circ$.

Ответ: $-\sqrt{3}$.

Решение. $\operatorname{ctg}50^\circ-4\cos 50^\circ=\dfrac{\cos 50^\circ-4\cos 50^\circ\sin 50^\circ}{\sin 50^\circ}=\dfrac{\cos 50^\circ-2\sin 100^\circ}{\sin 50^\circ}=\dfrac{\left(\cos 50^\circ-\cos 10^\circ\right)-\cos 10^\circ}{\sin 50^\circ}=$

$$=\frac{-2\sin 20^\circ\sin 30^\circ-\sin 80^\circ}{\sin 50^\circ}=\frac{-\sin 20^\circ-\sin 80^\circ}{\sin 50^\circ}=\frac{-2\sin 50^\circ\cos 30^\circ}{\sin 50^\circ}=-\sqrt{3}.$$

4. В числе $2016****02*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0,2,4,7,8,9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 6. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 1728.

Решение. Для того чтобы число делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3. Для того, чтобы выполнилась делимость на 2, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать $0, 2, 4, 8$ (4 способа).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $6\cdot 6\cdot 6$ способами), а четвёртую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 9), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 8), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $4\cdot 6\cdot 6\cdot 6\cdot 2=1728$ способов.

5. Найдите все пары *положительных* чисел (x,y), удовлетворяющих системе уравнений $\begin{cases} 3y-\sqrt{\dfrac{y}{x}}-6\sqrt{xy}+2=0, \\ x^2+81x^2y^4=2y^2. \end{cases}$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right),\left(\dfrac{\sqrt[4]{31}}{12};\dfrac{\sqrt[4]{31}}{3}\right)$.

Решение. Обозначим $\sqrt{\dfrac{y}{x}}=u$, $\sqrt{xy}=v$ (при этом $u>0$, $v>0$). Тогда $uv=\sqrt{\dfrac{y}{x}}\cdot\sqrt{xy}=\sqrt{y^2}=|y|=y$,

$\frac{v}{u}=\sqrt{xy}:\sqrt{\frac{y}{x}}=\sqrt{x^2}=|x|=x$, так как по условию x и y положительны. Система принимает вид

$$\begin{cases}3uv-u-6v+2=0,\\ \frac{v^2}{u^2}+81v^6u^2=2u^2v^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(u-2)(3v-1)=0,\\ 1+81v^4u^4=2u^4.\end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $u=2$ или $v=\frac{1}{3}$.

Если $u=2$, то $1+81\cdot 16v^4=32$, откуда $v=\frac{\sqrt[4]{31}}{6}$; тогда $x=\frac{v}{u}=\frac{\sqrt[4]{31}}{12}$, $y=uv=\frac{\sqrt[4]{31}}{3}$.

Если $v=\frac{1}{3}$, то $1+u^4=2u^4$, откуда $u=1$; тогда $x=\frac{v}{u}=\frac{1}{3}$, $y=uv=\frac{1}{3}$.

6. Вокруг равнобедренного остроугольного треугольника AMT с основанием MT описана окружность Ω. Расстояние от середины дуги AT, не содержащей точки M, до стороны AT равно 3, а расстояние от середины дуги MT, не содержащей точки A, до стороны MT равно $1{,}6$. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника AMT.

Ответ: $R=5$, $S=\frac{168\sqrt{21}}{25}$.

Решение. Пусть Q и L – середины дуг MT и AT; B и H – середины отрезков AT и MT; O – центр окружности Ω, R – её радиус. Тогда $OL\perp AT$, $OQ\perp MT$; $OB=OL-LB=R-3$, $OH=OQ-QH=R-\frac{8}{5}$.

Из теоремы Пифагора для треугольников OBT и OHT получаем, что $BT^2=R^2-(R-3)^2=6R-9$, $HT^2=R^2-\left(R-\frac{8}{5}\right)^2=\frac{16R}{5}-\frac{64}{25}$. Находим стороны треугольника ATH: $AH=AO+OH=2R-\frac{8}{5}$, $AT=2BT=2\sqrt{6R-9}$, $DH=\sqrt{\frac{16R}{5}-\frac{64}{25}}$.

По теореме Пифагора для треугольника ATH получаем $\left(2R-\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{16R}{5}-\frac{64}{25}\right)=24R-36$, откуда $5R^2-34R+45=0$, $R=5$ или $R=\frac{9}{5}$. Подходит только $R=5$ (во втором случае $BO=R-3<0$).

Значит, $AH=\frac{42}{5}$, $DH=\frac{4\sqrt{21}}{5}$, $S_{AMT}=AH\cdot TH=\frac{168\sqrt{21}}{25}$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимально возможное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги, при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует выставление положительного балла за задачу.

1.(4) Записано, что $b_2^2 = b_1 b_3$ .... ***1 балл,***
– не сделан отбор .... ***снять 2 балла.***

2.(6) Построено множество точек .... ***4 балла,***
– найдена его площадь .... ***2 балла.***

3.(5) Применены неверные тригонометрические формулы .... ***0 баллов за все последующие действия.***

4.(6) Указаны все возможные варианты для последней цифры числа .... ***1 балл,***
– за формулировки признаков делимости на 6 (на 15) .... ***баллы не добавляются,***
– при решении перебором получен неверный ответ .... ***не более 1 балла за задачу,***
– ответ записан в виде $6^k \cdot 8$ и т.п. .... ***баллы не снимаются.***

5.(6) Первое уравнение разложено на множители .... ***2 балла,***
– за каждый из двух полученных случаев .... ***2 балла.***

6.(8) Найден только радиус или только площадь .... ***6 баллов.***

1. Известно, что $\operatorname{tg}(\alpha+2\gamma)+\operatorname{tg}\alpha+\frac{5}{2}\operatorname{tg}(2\gamma)=0$, $\operatorname{tg}\gamma=-\frac{1}{2}$. Найдите $\operatorname{ctg}\alpha$.

Ответ: $\frac{1}{3}$ *или* $-\frac{6}{7}$.

Решение. $\operatorname{tg}2\gamma=\frac{2\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}^2\gamma}=\frac{-1}{3/4}=-\frac{4}{3}$. Тогда данное в условии равенство можно преобразовать так:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\gamma}+\operatorname{tg}\alpha+\frac{5}{2}\operatorname{tg}2\gamma=0 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg}\alpha-\frac{4}{3}}{1+\frac{4}{3}\operatorname{tg}\alpha}+\operatorname{tg}\alpha-\frac{10}{3}=0.$$

Приводя к общему знаменателю и упрощая, получаем равносильное на ОДЗ уравнение $6\operatorname{tg}^2\alpha-11\operatorname{tg}\alpha-21=0$, откуда $\operatorname{tg}\alpha=3$ или $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{7}{6}$. Оба варианта подходят (т.к. знаменатели не обращаются в ноль). Следовательно, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{3}$ или $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{6}{7}$.

2. Решите неравенство $8\left|x-\sqrt{x}+2\right|+2x\sqrt{x}<x^2+x+28$.

Ответ: $x\in[0;4)\cup(9;+\infty)$.

Решение. Заметим, что выражение под модулем неотрицательно на ОДЗ (это квадратный трёхчлен относительно $\sqrt{x}$ и $D<0$). Значит, модуль можно опустить. Перепишем неравенство в виде

$$8\left(x-\sqrt{x}+2\right)<\left(x^2-2x\sqrt{x}+x\right)+28 \Leftrightarrow 8\left(x-\sqrt{x}\right)+16<\left(x-\sqrt{x}\right)^2+28.$$

Обозначая $x-\sqrt{x}=t$, получаем $t^2-8t+12>0$, откуда $t\in(-\infty;2)\cup(6;+\infty)$.

Если $t<2$, то $x-\sqrt{x}-2<0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)<0\Leftrightarrow\sqrt{x}<2\Leftrightarrow 0\le x<4$.

Если $t>6$, то $x-\sqrt{x}-6>0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)>0\Leftrightarrow\sqrt{x}>3\Leftrightarrow x>9$.

Значит, $x\in[0;4)\cup(9;+\infty)$.

3. В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр $0,2,4,5,7,9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 75. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 2592.

Решение. Для того чтобы число делилось на 75, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 25 и на 3. Для того, чтобы выполнилась делимость на 25, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 5 (1 способ).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем четыре цифры произвольным образом (это можно сделать $6\cdot6\cdot6\cdot6$ способами), а пятую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 9), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 5), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $1\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot2=2592$ способа.

4. Изобразите на плоскости $(x;y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению $|15x|+|8y|+|120-15x-8y|=120$, и найдите площадь полученной фигуры.

Ответ: 60.

Решение. Заметим, что равенство $|a|+|b|+|c|=a+b+c$ выполняется тогда и только тогда, когда числа a, b и c неотрицательны (так как если хотя бы одно из них отрицательно, то левая часть больше правой). Поэтому первое уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}15x\ge0,\\ 8y\ge0,\\ 120-15x-8y\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge0,\\ y\ge0,\\ 15x+8y\le120.\end{cases}$$

Эта система задаёт на плоскости треугольник с вершинами $E(8;0)$, $G(0;15)$, $N(0;0)$, площадь которого равна 60.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2y + xy^2 - 2x - 2y + 10 = 0, \\ x^3y - xy^3 - 2x^2 + 2y^2 - 30 = 0. \end{cases}$

Ответ: $(-4; -1)$.

Решение. Данная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} xy(x+y) - 2(x+y) + 10 = 0, \\ xy(x^2 - y^2) - 2(x^2 - y^2) - 30 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy-2)(x+y) = -10, \\ (xy-2)(x-y)(x+y) = 30. \end{cases}$$

Разделив почленно второе уравнение последней системы на первое, получаем $x - y = -3$, откуда $y = x + 3$. Подставляем это в первое уравнение: $(x^2 + 3x - 2)(2x+3) = -10$, $2x^3 + 9x^2 + 5x + 4 = 0$. Подбором находим целочисленный корень этого уравнение – $x = -4$. Выделив множитель $(x+4)$, получаем $(x+4)(2x^2 + x + 1) = 0$. Значит, уравнение имеет единственный корень $x = -4$. Тогда $y = -1$, и пара чисел $(-4; -1)$ является единственным решением системы.

6. Равнобедренный треугольник ABC с основанием BC вписан в окружность Ω. Хорды LM и PQ, параллельные прямой BC, пересекают сторону AB в точках D и T соответственно, и при этом $AD = DT = TB$. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника ABC, если $LM = \frac{10}{\sqrt{3}}$, $PQ = \frac{2\sqrt{26}}{\sqrt{3}}$, а центр O окружности Ω расположен между прямыми LM и PQ.

Ответ: $R = \frac{37}{12}, S = 6$.

Решение. Прямая AO перпендикулярна хордам LM, PQ, BC и делит каждую из них пополам. Пусть точки N, H и E – середины LM, PQ и BC. Обозначим радиус окружности Ω за R; $AN = NH = HE = x$.

Тогда $OH = AH - OA = 2x - R$, $ON = OA - AN = R - x$ и по теореме Пифагора для треугольников OHP и OLN получаем $R^2 = \frac{26}{3} + (2x - R)^2$, $R^2 = \frac{25}{3} + (R - x)^2$, откуда после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых следует, что

$$\begin{cases} 2x^2 - 2Rx + \frac{13}{3} = 0, \\ x^2 - 2Rx + \frac{25}{3} = 0. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, находим, что $x^2 - 4 = 0$, $x = 2$. Тогда $R = \frac{6x^2 + 13}{6x} = \frac{37}{12}$;

$OE = AE - AO = 3x - R = \frac{35}{12}$, $BE^2 = OB^2 - OE^2 = \left(\frac{37}{12}\right)^2 - \left(\frac{35}{12}\right)^2 = 1$. Следовательно, $S_{ABC} = AE \cdot BE = 6 \cdot 1 = 6$.

1. Известно, что $\operatorname{tg}(2\alpha-\beta)+6\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}\beta=0$, $\operatorname{tg}\alpha=2$. Найдите $\operatorname{ctg}\beta$.

Ответ: 1 *или* $\frac{1}{7}$.

Решение. $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{4}{1-4}=-\frac{4}{3}$. Тогда данное в условии равенство можно преобразовать так:

$$\frac{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\beta}+6\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}\beta=0\Leftrightarrow\frac{-\frac{4}{3}-\operatorname{tg}\beta}{1-\frac{4}{3}\operatorname{tg}\beta}-8+\operatorname{tg}\beta=0.$$

Приводя к общему знаменателю и упрощая, получаем равносильное на ОДЗ уравнение $\operatorname{tg}^2\beta-8\operatorname{tg}\beta+7=0$, откуда $\operatorname{tg}\beta=7$ или $\operatorname{tg}\beta=1$. Оба варианта подходят (т.к. знаменатели не обращаются в ноль). Следовательно, $\operatorname{ctg}\beta=\frac{1}{7}$ или $\operatorname{ctg}\beta=1$.

2. Решите неравенство $4x^2+x+9>2\left|4x-2\sqrt{x}+3\right|+4x\sqrt{x}$.

Ответ: $x\in[0;1)\cup\left(\frac{9}{4};+\infty\right)$.

Решение. Заметим, что выражение под модулем неотрицательно на ОДЗ (это квадратный трёхчлен относительно $\sqrt{x}$ и $D<0$). Значит, модуль можно опустить. Перепишем неравенство в виде

$$\left(4x^2-4x\sqrt{x}+x\right)+9>2\left(4x-2\sqrt{x}+3\right)\Leftrightarrow\left(2x-\sqrt{x}\right)^2+9>4\left(2x-\sqrt{x}\right)+6.$$

Обозначая $2x-\sqrt{x}=t$, получаем $t^2-4t+3>0$, откуда $t\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$.

Если $t<1$, то $2x-\sqrt{x}-1<0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)\left(2\sqrt{x}+1\right)<0\Leftrightarrow\sqrt{x}<1\Leftrightarrow0\le x<1$.

Если $t>3$, то $2x-\sqrt{x}-3>0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}+1\right)\left(2\sqrt{x}-3\right)>0\Leftrightarrow2\sqrt{x}>3\Leftrightarrow x>\frac{9}{4}$.

Значит, $x\in[0;1)\cup\left(\frac{9}{4};+\infty\right)$.

3. В числе $2*0*1*6*02*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0,2,4,7,8,9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 12. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 1296.

Решение. Для того чтобы число делилось на 12, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 4 и на 3. Для того, чтобы выполнилась делимость на 4, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0, 4 или 8 (3 способа).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $6\cdot6\cdot6\cdot6$ способами), а четвёртую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 9), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 8), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $3\cdot6\cdot6\cdot6\cdot2=1296$ способов.

4. Изобразите на плоскости $(x;y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению $|3x|+|4y|+|48-3x-4y|=48$, и найдите площадь полученной фигуры.

Ответ: 96.

Решение. Заметим, что равенство $|a|+|b|+|c|=a+b+c$ выполняется тогда и только тогда, когда числа a, b и c неотрицательны (так как если хотя бы одно из них отрицательно, то левая часть больше правой). Поэтому первое уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}3x\ge0,\\4y\ge0,\\48-3x-4y\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge0,\\y\ge0,\\3x+4y\le48.\end{cases}$$

Эта система задаёт на плоскости треугольник с вершинами $E(16;0)$, $G(0;12)$, $N(0;0)$, площадь которого равна 96.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 y - xy^2 - 3x + 3y + 1 = 0, \\ x^3 y - xy^3 - 3x^2 + 3y^2 + 3 = 0. \end{cases}$

Ответ: $(2;1)$.

Решение. Данная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} xy(x-y) - 3(x-y) + 1 = 0, \\ xy\left(x^2 - y^2\right) - 3\left(x^2 - y^2\right) + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy-3)(x-y) = -1, \\ (xy-3)(x-y)(x+y) = -3. \end{cases}$$

Разделив почленно второе уравнение последней системы на первое, получаем $x + y = 3$, откуда $y = -x + 3$. Подставляем это в первое уравнение: $\left(-x^2 + 3x - 3\right)(2x - 3) = -1$, $2x^3 - 9x^2 + 15x - 10 = 0$. Подбором находим целочисленный корень этого уравнения – $x = 2$. Выделив множитель $(x-2)$, получаем $(x-2)\left(2x^2 - 5x + 5\right) = 0$. Значит, уравнение имеет единственный корень $x = 2$. Тогда $y = 1$, и пара чисел $(2;1)$ является единственным решением системы.

6. Равнобедренный треугольник PQT с основанием PQ вписан в окружность Ω. Хорды AB и CD, параллельные прямой PQ, пересекают сторону QT в точках L и M соответственно, и при этом $QL = LM = MT$. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника PQT, если $AB = 2\sqrt{14}$, $CD = 2\sqrt{11}$, а центр O окружности Ω расположен между прямыми AB и CD.

Ответ: $R = \frac{15}{4}$, $S = 18$.

Решение. Прямая TO перпендикулярна хордам CD, AB, PQ и делит каждую из них пополам. Пусть точки N, H и E – середины CD, AB и PQ. Обозначим радиус окружности Ω за R; $TN = NH = HE = x$.

Тогда $OH = TH - OT = 2x - R$, $ON = OT - TN = R - x$ и по теореме Пифагора для треугольников OAH и OCN получаем $R^2 = 14 + (2x - R)^2$, $R^2 = 11 + (R - x)^2$, откуда после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых следует, что

$$\begin{cases} 2x^2 - 2Rx + 7 = 0, \\ x^2 - 2Rx + 11 = 0. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, находим, что $x^2 - 4 = 0$, $x = 2$. Тогда $R = \frac{2x^2 + 7}{2x} = \frac{15}{4}$;

$OE = TE - TO = 3x - R = \frac{9}{4}$, $QE^2 = OQ^2 - OE^2 = \left(\frac{15}{4}\right)^2 - \left(\frac{9}{4}\right)^2 = 9$. Следовательно, $S_{PQT} = TE \cdot QE = 6 \cdot 3 = 18$.

1. Известно, что $\operatorname{tg}(\alpha+2\gamma)+2\operatorname{tg}\alpha-4\operatorname{tg}(2\gamma)=0$, $\operatorname{tg}\gamma=\frac{1}{3}$. Найдите $\operatorname{ctg}\alpha$.

Ответ: 2 *или* $\frac{1}{3}$.

Решение. $\operatorname{tg}2\gamma=\frac{2\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}^2\gamma}=\frac{2/3}{1-1/9}=\frac{3}{4}$. Тогда данное в условии равенство можно преобразовать так:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}2\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\gamma}+2\operatorname{tg}\alpha-3=0\Leftrightarrow\frac{\operatorname{tg}\alpha+\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}\operatorname{tg}\alpha}+2\operatorname{tg}\alpha-3=0.$$

Приводя к общему знаменателю и упрощая, получаем равносильное на ОДЗ уравнение $2\operatorname{tg}^2\alpha-7\operatorname{tg}\alpha+3=0$, откуда $\operatorname{tg}\alpha=3$ или $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$. Оба варианта подходят (т.к. знаменатели не обращаются в ноль). Следовательно, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{3}$ или $\operatorname{ctg}\alpha=2$.

2. Решите неравенство $x^2+x+20>8\left|x-\sqrt{x}+1\right|+2x\sqrt{x}$.

Ответ: $x\in[0;4)\cup(9;+\infty)$.

Решение. Заметим, что выражение под модулем неотрицательно на ОДЗ (это квадратный трёхчлен относительно $\sqrt{x}$ и $D<0$). Значит, модуль можно опустить. Перепишем неравенство в виде

$$\left(x^2-2x\sqrt{x}+x\right)+20>8\left(x-\sqrt{x}+1\right)\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{x}\right)^2+20>8\left(x-\sqrt{x}\right)+8.$$

Обозначая $x-\sqrt{x}=t$, получаем $t^2-8t+12>0$, откуда $t\in(-\infty;2)\cup(6;+\infty)$.

Если $t<2$, то $x-\sqrt{x}-2<0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)<0\Leftrightarrow\sqrt{x}<2\Leftrightarrow 0\le x<4$.

Если $t>6$, то $x-\sqrt{x}-6>0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)>0\Leftrightarrow\sqrt{x}>3\Leftrightarrow x>9$.

Значит, $x\in[0;4)\cup(9;+\infty)$.

3. В числе $2*0*1*6*07*$ нужно заменить каждую из 5 звёздочек на любую из цифр $0,2,4,5,6,7$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 11-значное число делилось на 75. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 432.

Решение. Для того чтобы число делилось на 75, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 25 и на 3. Для того, чтобы выполнилась делимость на 25, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 5 (1 способ).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем три цифры произвольным образом (это можно сделать $6\cdot6\cdot6$ способами), а пятую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 6), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 5), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $1\cdot6\cdot6\cdot6\cdot2=432$ способа.

4. Изобразите на плоскости $(x;y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению $|5x|+|12y|+|60-5x-12y|=60$, и найдите площадь полученной фигуры.

Ответ: 30.

Решение. Заметим, что равенство $|a|+|b|+|c|=a+b+c$ выполняется тогда и только тогда, когда числа a, b и c неотрицательны (так как если хотя бы одно из них отрицательно, то левая часть больше правой). Поэтому первое уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}5x\ge0,\\12y\ge0,\\60-5x-12y\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge0,\\y\ge0,\\5x+12y\le60.\end{cases}$$

Эта система задаёт на плоскости треугольник с вершинами $E(12;0)$, $G(0;5)$, $N(0;0)$, площадь которого равна 30.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2y + xy^2 + 3x + 3y + 24 = 0, \\ x^3y - xy^3 + 3x^2 - 3y^2 - 48 = 0. \end{cases}$

Ответ: $(-3;-1)$.

Решение. Данная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} xy(x+y) + 3(x+y) + 24 = 0, \\ xy(x^2-y^2) + 3(x^2-y^2) - 48 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy+3)(x+y) = -24, \\ (xy+3)(x-y)(x+y) = 48. \end{cases}$$

Разделив почленно второе уравнение последней системы на первое, получаем $x - y = -2$, откуда $y = x + 2$. Подставляем это в первое уравнение: $(x^2+2x+3)(2x+2) = -24$, $x^3 + 3x^2 + 5x + 15 = 0$. Подбором находим целочисленный корень этого уравнение – $x = -3$. Выделив множитель $(x+3)$, получаем $(x+3)(x^2+5) = 0$. Значит, уравнение имеет единственный корень $x = -3$. Тогда $y = -1$, и пара чисел $(-3;-1)$ является единственным решением системы.

6. Равнобедренный тупоугольный треугольник PQT с основанием PT вписан в окружность Ω. Хорды AB и CD, параллельные прямой PT, пересекают сторону QT в точках K и L соответственно, и при этом $QK = KL = LT$. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника PQT, если $AB = 2\sqrt{66}$, $CD = 2\sqrt{114}$.

Ответ: $R = 12{,}5$, $S = 108$.

Решение. Прямая QO перпендикулярна хордам AB, CD, PT и делит каждую из них пополам. Пусть точки M, E и H – середины AB, CD и PT. Обозначим радиус окружности Ω за R; $QM = ME = EH = x$.

Поскольку треугольник тупоугольный, центр его описанной окружности лежит вне треугольника. Тогда $OM = OQ - MQ = R - x$, $OE = OQ - QE = R - 2x$ и по теореме Пифагора для треугольников OMA и OEC получаем $R^2 = 66 + (R-x)^2$, $R^2 = 114 + (R-2x)^2$, откуда после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых следует, что

$$\begin{cases} x^2 - 2Rx + 66 = 0, \\ 2x^2 - 2Rx + 57 = 0. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, находим, что $-x^2 + 9 = 0$, $x = 3$. Тогда $R = \frac{x^2+66}{2x} = \frac{25}{2}$;

$$OH = OQ - QH = R - 3x = \frac{7}{2},\ TH^2 = OT^2 - OH^2 = \left(\frac{25}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 144.$$

Следовательно, $S_{PQT} = QH \cdot TH = 9 \cdot 12 = 108$.

1. Известно, что $\operatorname{tg}(2\alpha-\beta)-4\operatorname{tg}2\alpha+4\operatorname{tg}\beta=0$, $\operatorname{tg}\alpha=-3$. Найдите $\operatorname{ctg}\beta$.

Ответ: -1 *или* $\frac{4}{3}$.

Решение. $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{-6}{1-9}=\frac{3}{4}$. Тогда данное в условии равенство можно преобразовать так:

$$\frac{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\beta}-4\operatorname{tg}2\alpha+4\operatorname{tg}\beta=0\Leftrightarrow\frac{\frac{3}{4}-\operatorname{tg}\beta}{1+\frac{3}{4}\operatorname{tg}\beta}-3+4\operatorname{tg}\beta=0.$$

Приводя к общему знаменателю и упрощая, получаем равносильное на ОДЗ уравнение $4\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}\beta-3=0$, откуда $\operatorname{tg}\beta=\frac{3}{4}$ или $\operatorname{tg}\beta=-1$. Оба варианта подходят (т.к. знаменатели не обращаются в ноль). Следовательно, $\operatorname{ctg}\beta=\frac{4}{3}$ или $\operatorname{ctg}\beta=-1$.

2. Решите неравенство $4x^2+x+5>2\left|4x-2\sqrt{x}+1\right|+4x\sqrt{x}$.

Ответ: $x\in[0;1)\cup\left(\frac{9}{4};+\infty\right)$.

Решение. Заметим, что выражение под модулем неотрицательно на ОДЗ (это квадратный трёхчлен относительно $\sqrt{x}$ и $D<0$). Значит, модуль можно опустить. Перепишем неравенство в виде

$$\left(4x^2-4x\sqrt{x}+x\right)+5>2\left(4x-2\sqrt{x}+1\right)\Leftrightarrow\left(2x-\sqrt{x}\right)^2+5>4\left(2x-\sqrt{x}\right)+2.$$

Обозначая $2x-\sqrt{x}=t$, получаем $t^2-4t+3>0$, откуда $t\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$.

Если $t<1$, то $2x-\sqrt{x}-1<0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)\left(2\sqrt{x}+1\right)<0\Leftrightarrow\sqrt{x}<1\Leftrightarrow0\le x<1$.

Если $t>3$, то $2x-\sqrt{x}-3>0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}+1\right)\left(2\sqrt{x}-3\right)>0\Leftrightarrow2\sqrt{x}>3\Leftrightarrow x>\frac{9}{4}$.

Значит, $x\in[0;1)\cup\left(\frac{9}{4};+\infty\right)$.

3. В числе $2*0*1*6*0*2*$ нужно заменить каждую из 6 звёздочек на любую из цифр $0,2,4,5,7,9$ (цифры могут повторяться) так, чтобы полученное 12-значное число делилось на 12. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 5184.

Решение. Для того чтобы число делилось на 12, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 4 и на 3. Для того, чтобы выполнилась делимость на 4, в качестве последней цифры из имеющихся вариантов можем выбрать 0 или 4 (2 способа).

Чтобы обеспечить делимость на три, поступим так. Выберем четыре цифры произвольным образом (это можно сделать $6\cdot6\cdot6\cdot6$ способами), а пятую цифру подберём так, чтобы сумма всех цифр числа делилась на 3. Поскольку среди указанных цифр есть две цифры, делящиеся на 3 (0 и 9), две цифры, дающие остаток 1 от деления на 3 (4 и 7) и две цифры, дающие остаток 2 от деления на 3 (2 и 5), то этот выбор можно осуществить двумя способами.

Применяя правило произведения, получаем, что всего $2\cdot6\cdot6\cdot6\cdot6\cdot2=5184$ способа.

4. Изобразите на плоскости $(x;y)$ множество точек, удовлетворяющих уравнению $|4x|+|3y|+|24-4x-3y|=24$, и найдите площадь полученной фигуры.

Ответ: 24.

Решение. Заметим, что равенство $|a|+|b|+|c|=a+b+c$ выполняется тогда и только тогда, когда числа a, b и c неотрицательны (так как если хотя бы одно из них отрицательно, то левая часть больше правой). Поэтому первое уравнение равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}4x\ge0,\\3y\ge0,\\24-4x-3y\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge0,\\y\ge0,\\4x+3y\le24.\end{cases}$$

Эта система задаёт на плоскости треугольник с вершинами $E(6;0)$, $G(0;8)$, $N(0;0)$, площадь которого равна 24.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2y - xy^2 - 5x + 5y + 3 = 0, \\ x^3y - xy^3 - 5x^2 + 5y^2 + 15 = 0. \end{cases}$

Ответ: $(4;1)$.

Решение. Данная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} xy(x-y) - 5(x-y) + 3 = 0, \\ xy(x^2-y^2) - 5(x^2-y^2) + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy-5)(x-y) = -3, \\ (xy-5)(x-y)(x+y) = -15. \end{cases}$$

Разделив почленно второе уравнение последней системы на первое, получаем $x + y = 5$, откуда $y = -x + 5$. Подставляем это в первое уравнение: $(-x^2 + 5x - 5)(2x - 5) = -3$, $2x^3 - 15x^2 + 35x - 28 = 0$. Подбором находим целочисленный корень этого уравнения – $x = 4$. Выделив множитель $(x-4)$, получаем $(x-4)(2x^2 - 7x + 7) = 0$. Значит, уравнение имеет единственный корень $x = 4$. Тогда $y = 1$, и пара чисел $(4;1)$ является единственным решением системы.

6. Равнобедренный треугольник ABC с основанием AC вписан в окружность Ω. Хорды DN и LT, параллельные прямой AC, пересекают сторону BC в точках F и H соответственно, и при этом $BF = FH = HC$. Найдите радиус окружности Ω и площадь треугольника ABC, если $DN = 2\sqrt{30}$, $LT = 2\sqrt{42}$, а центр O окружности Ω расположен между прямыми LT и AC.

Ответ: $R = 6{,}5$, $S = 54$.

Решение. Прямая BO перпендикулярна хордам AC, DN, LT и делит каждую из них пополам. Пусть точки P, Q и E – середины DN, LT и AC. Обозначим радиус окружности Ω за R; $BP = PQ = QE = x$.

Тогда $OQ = OB - BQ = R - 2x$, $OP = OB - BP = R - x$ и по теореме Пифагора для треугольников OQT и OPN получаем $R^2 = 42 + (R-2x)^2$, $R^2 = 30 + (R-x)^2$, откуда после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых следует, что

$$\begin{cases} 2x^2 - 2Rx + 21 = 0, \\ x^2 - 2Rx + 30 = 0. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, находим, что $x^2 - 9 = 0$, $x = 3$. Тогда $R = \dfrac{2x^2 + 21}{2x} = \dfrac{13}{2}$;

$OE = BE - BO = 3x - R = \dfrac{5}{2}$, $CE^2 = OC^2 - OE^2 = \left(\dfrac{13}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = 36$. Следовательно, $S_{ABC} = BE \cdot CE = 9 \cdot 6 = 54$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимально возможное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги, при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует выставление положительного балла за задачу.

1.(5) Использованы неверный формулы тригонометрии .... ***0 баллов за все дальнейшие действия,***
– найден $\operatorname{tg} 2\gamma$ (билеты 29, 31) или $\operatorname{tg} 2\alpha$ (билеты 30, 32) .... ***1 балл,***
– получено дробно-рациональное уравнение относительно $\operatorname{tg}\alpha$ (билеты 29,31) или $\operatorname{tg}\beta$ (билеты 30,32) .... ***1 балл,***
– это уравнение приведено к квадратному .... ***1 балл.***

2.(5) Обоснованно раскрыт модуль .... ***1 балл.***
<u>*При решении с помощью замены:*</u>
– сделана замена $ax-\sqrt{x}=t$ и неравенство приведено к неравенству относительно t .... ***1 балл,***
– решено квадратное неравенство относительно t .... ***1 балл,***
– за каждый из двух рассмотренных промежутков для t .... ***по 1 баллу.***
<u>*При другом способе решения:*</u>
– Неравенство приведено к виду $(\sqrt{x}+a)(\sqrt{x}+b)(\sqrt{x}+c)(\sqrt{x}+d)>0$ .... ***2 балла,***
– В ответ включены отрицательные значения x .... ***не более 3 баллов за задачу.***

3.(6) Указаны все возможные варианты для последней цифры числа .... ***1 балл,***
– за формулировки признаков делимости на 12 (на 75) .... ***баллы не добавляются,***
– при решении перебором получен неверный ответ .... ***не более 1 балла за задачу,***
– ответ записан в виде $6^k \cdot 8$ и т.п. .... ***баллы не снимаются.***

4.(4) Построено множество .... ***3 балла,***
– найдена его площадь .... ***1 балл.***

5.(6) Получено линейное соотношение между переменными (в билете 29 – $y=x+3$, в билете 30 – $x+y=3$, в билете 31 – $y=x+2$, в билете 32 – $x+y=5$) .... ***3 балла,***
– решено кубическое уравнение .... ***2 балла,***
– получено решение системы.. ***1 балл.***

6.(9) Получен ответ только на один из двух вопросов .... ***6 баллов.***

КРИТЕРИИ
определения победителей и призёров олимпиады школьников «Физтех» по математике

9 класс

Максимальное количество очков – 32.

- Победитель – от 30 до 32 очков включительно,
- Призёр 2 степени – от 26 до 29 очков включительно,
- Призёр 3 степени – от 20 до 25 очков включительно.

10 класс

Максимальное количество очков – 35.

- Победитель – от 30 до 35 очков включительно,
- Призёр 2 степени – от 24 до 29 очков включительно,
- Призёр 3 степени – от 18 до 23 очков включительно.

11 класс

Максимальное количество очков – 48.

- Победитель – от 40 до 48 очков включительно,
- Призёр 2 степени – от 31 до 39 очков включительно,
- Призёр 3 степени – от 24 до 30 очков включительно.

Председатель жюри олимпиады С.Е. Городецкий