МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР ______________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\frac{|\cos x| - \cos 3x}{\cos x \sin 2x} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

2. Решите уравнение

$$\left(\frac{3x}{2}\right)^{\log_3(8x)} = \frac{x^7}{8}.$$

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 291000 и таких, что $k^2 - 1$ делится нацело на 291.

4. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 2, \\ 81x^4 - 18x^2y^2 + y^4 - 360x^2 - 40y^2 + 400 = 0. \end{cases}$$

5. На ребре AA_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка T такая, что $AT : A_1T = 4:1$. Точка T является вершиной прямого кругового конуса такого, что три вершины призмы принадлежат окружности его основания.
а) Найдите отношение высоты призмы к ребру её основания.
б) Пусть дополнительно известно, что $BB_1 = 5$. Найдите объём конуса.

6. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases} x = |y - b| + \dfrac{3}{b}, \\ x^2 + y^2 + 32 = a(2y - a) + 12x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Две окружности Ω_1 и Ω_2 равных радиусов с центрами O_1 и O_2 вписаны в углы BAD и BCD соответственно, при этом первая касается стороны AD в точке K, а вторая касается стороны BC в точке T.
а) Найдите радиус окружности Ω_1, если $AK = 2$, $CT = 8$.
б) Пусть дополнительно известно, что точка O_2 является центром окружности, описанной около треугольника BOC. Найдите угол BDC.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\frac{|\sin x| - \sin 3x}{\cos x \cos 2x} = 2\sqrt{3}.$$

2. Решите уравнение

$$\left(\frac{x}{243}\right)^{\log_2\left(\frac{9x}{4}\right)} = \frac{729}{x^4}.$$

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 445000 и таких, что $k^2 - 1$ делится нацело на 445.

4. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 1, \\ 16x^4 - 8x^2y^2 + y^4 - 40x^2 - 10y^2 + 25 = 0. \end{cases}$$

5. На ребре BB_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка T такая, что $BT : B_1T = 2 : 5$. Точка T является вершиной прямого кругового конуса такого, что три вершины призмы принадлежат окружности его основания.
а) Найдите отношение высоты призмы к ребру её основания.
б) Пусть дополнительно известно, что $CC_1 = 7$. Найдите объём конуса.

6. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся число b такое, что система

$$\begin{cases} x = |y + a| + \frac{4}{a}, \\ x^2 + y^2 + 24 + b(2y + b) = 10x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Две окружности Ω_1 и Ω_2 равных радиусов с центрами O_1 и O_2 вписаны в углы ABC и ADC соответственно, при этом первая касается стороны BC в точке K, а вторая касается стороны AD в точке T.
а) Найдите радиус окружности Ω_1, если $BK = 3\sqrt{3}$, $DT = \sqrt{3}$.
б) Пусть дополнительно известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника BOC. Найдите угол BDC.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
11 класс

БИЛЕТ 3 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\frac{|\cos x| + \cos 3x}{\sin x \cos 2x} = -2\sqrt{3}.$$

2. Решите уравнение

$$\left(\frac{x}{400}\right)^{\log_5\left(\frac{x}{8}\right)} = \frac{1024}{x^3}.$$

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 485000 таких, что k^2-1 делится нацело на 485.

4. Решите систему

$$\begin{cases} x^2+y^2 \le 2, \\ x^4-8x^2y^2+16y^4-20x^2-80y^2+100=0. \end{cases}$$

5. На ребре CC_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка T такая, что $CT:C_1T=1:3$. Точка T является вершиной прямого кругового конуса такого, что три вершины призмы принадлежат окружности его основания.

а) Найдите отношение высоты призмы к ребру её основания.

б) Пусть дополнительно известно, что $BB_1=8$. Найдите объём конуса.

6. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases} x=\frac{7}{b}-|y+b|, \\ x^2+y^2+96=-a(2y+a)-20x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Две окружности Ω_1 и Ω_2 равных радиусов с центрами O_1 и O_2 вписаны в углы BAD и BCD соответственно, при этом первая касается стороны AB в точке L, а вторая касается стороны BC в точке F.

а) Найдите радиус окружности Ω_2, если $AL=\sqrt{2}$, $CF=2\sqrt{2}$.

б) Пусть дополнительно известно, что точка O_2 является центром окружности, описанной около треугольника BOC. Найдите угол BDC.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
11 класс

БИЛЕТ 4 ШИФР ______________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение
$$\frac{|\sin x| + \sin 3x}{\cos x \cos 2x} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

2. Решите уравнение
$$\left(\frac{x}{4}\right)^{\log_5(50x)} = x^6.$$

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих $267\,000$ и таких, что k^2-1 делится нацело на 267.

4. Решите систему
$$\begin{cases} x^2+y^2 \le 1, \\ x^4-18x^2y^2+81y^4-20x^2-180y^2+100=0. \end{cases}$$

5. На ребре BB_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка T такая, что $BT : B_1T = 2:3$. Точка T является вершиной прямого кругового конуса такого, что три вершины призмы принадлежат окружности его основания.
а) Найдите отношение высоты призмы к ребру её основания.
б) Пусть дополнительно известно, что $CC_1 = 5$. Найдите объём конуса.

6. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся число b такое, что система
$$\begin{cases} x = \frac{6}{a} - |y-a|, \\ x^2+y^2+b^2+63 = 2(by-8x) \end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Две окружности Ω_1 и Ω_2 равных радиусов с центрами O_1 и O_2 вписаны в углы ABC и ADC соответственно, при этом первая касается стороны BC в точке F, а вторая касается стороны AD в точке P.
а) Найдите радиус окружности Ω_2, если $BF = 3\sqrt{2}$, $DP = \sqrt{2}$.
б) Пусть дополнительно известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника BOC. Найдите угол BDC.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
11 класс

БИЛЕТ 5 ШИФР ________________________________
заполняется ответственным секретарём

1. Решите неравенство

$$\frac{\log_3\left(x^4\right)\cdot\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2\right)+\log_3\left(x^2\right)-\log_{\frac{1}{3}}\left(x^4\right)+2}{\left(\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2\right)\right)^3+64}\leq 0.$$

2. Решите уравнение

$$\left(\frac{7}{2}\cos 2x+2\right)\cdot\left|2\cos 2x-1\right|=\cos x\left(\cos x+\cos 5x\right).$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=-\dfrac{2}{15},\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}=-\dfrac{2}{3},\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=-\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM:MC=2:5$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка F такая, что $MF:FC=1:4$. Пусть дополнительно известно, что прямые LF и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

5. Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих условию $5x^2-6xy+y^2=6^{100}$.

6. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся число b такое, что система

$$\begin{cases}x^2+y^2+2a(a+y-x)=49,\\ y=15\cos(x-b)-8\sin(x-b)\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

7. В основании четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$, в котором $AC=4$ и $\angle DBC=30^\circ$. Сфера проходит через вершины D, A, B, B_1, C_1, D_1.

а) Найдите площадь круга, полученного в сечении сферы плоскостью, проходящей через точки B, C и D.

б) Найдите угол A_1CD.

в) Пусть дополнительно известно, что радиус сферы равен 5. Найдите объём призмы.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
11 класс

БИЛЕТ 6 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите неравенство

$$\frac{125+\left(\log_{\frac{1}{2}}\left(x^4\right)\right)^3}{\log_2\left(x^4\right)\cdot\log_2\left(x^2\right)+6\log_{\frac{1}{2}}\left(x^4\right)+17\log_2\left(x^2\right)-3}\geq 0.$$

2. Решите уравнение

$$\left(\frac{7}{4}-2\cos 2x\right)\cdot\left|2\cos 2x+1\right|=\cos x(\cos x-\cos 5x).$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{1}{12},\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{1}{6},\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM:MC=2:7$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка T такая, что $MT:TC=1:6$. Пусть дополнительно известно, что прямые LT и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

5. Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих условию $6x^2-7xy+y^2=10^{100}$.

6. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases}x^2+y^2+2b(b-x+y)=4,\\ y=5\cos(x-a)-12\sin(x-a)\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

7. В основании четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$, в котором $CD=3$ и $\angle ABD=30^\circ$. Сфера проходит через вершины D, C, B, B_1, A_1, D_1.

а) Найдите площадь круга, полученного в сечении сферы плоскостью, проходящей через точки A, C и D.

б) Найдите угол C_1AB.

в) Пусть дополнительно известно, что радиус сферы равен 6. Найдите объём призмы.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
11 класс

БИЛЕТ 7 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите неравенство

$$\frac{\log_2\left(x^6\right)\cdot\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2\right)-\log_{\frac{1}{2}}\left(x^6\right)-8\log_2\left(x^2\right)+2}{8+\left(\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2\right)\right)^3}\leq 0.$$

2. Решите уравнение

$$\left(3\cos 2x+\frac{9}{4}\right)\cdot\left|1-2\cos 2x\right|=\sin x(\sin x-\sin 5x).$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=1,\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{4}{3},\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=-\dfrac{4}{5}.\end{cases}$$

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM:MC=3:8$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка F такая, что $MF:FC=1:7$. Пусть дополнительно известно, что прямые LF и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

5. Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих условию $x^2+6xy+5y^2=10^{100}$.

6. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся число b такое, что система

$$\begin{cases}x^2+y^2+2a(a-x-y)=64,\\ y=8\sin(x-2b)-6\cos(x-2b)\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

7. В основании четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$, в котором $BD=12$ и $\angle BAC=60^\circ$. Сфера проходит через вершины D, A, B, B_1, C_1, D_1.

а) Найдите площадь круга, полученного в сечении сферы плоскостью, проходящей через точки A_1, B_1 и C_1.

б) Найдите угол A_1CB.

в) Пусть дополнительно известно, что радиус сферы равен 8. Найдите объём призмы.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
11 класс

БИЛЕТ 8 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите неравенство

$$\frac{64+\left(\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2\right)\right)^3}{\log_{\frac{1}{5}}\left(x^6\right)\cdot\log_5\left(x^2\right)+5\log_5\left(x^6\right)+14\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2\right)+2}\leq 0.$$

2. Решите уравнение

$$\left(\frac{7}{4}-3\cos 2x\right)\cdot\left|1+2\cos 2x\right|=\sin x\left(\sin x+\sin 5x\right).$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{6}{5},\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{3}{4},\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{2}{3}.\end{cases}$$

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM:MC=3:7$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка T такая, что $MT:TC=1:6$. Пусть дополнительно известно, что прямые LT и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

5. Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих условию $x^2+7xy+6y^2=15^{50}$.

6. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases}x^2+y^2+2b(b+x+y)=81,\\ y=4\cos(x+3a)-3\sin(x+3a)\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

7. В основании четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$, в котором $BD=3$ и $\angle ADC=60^\circ$. Сфера проходит через вершины D, C, B, B_1, A_1, D_1.

а) Найдите площадь круга, полученного в сечении сферы плоскостью, проходящей через точки A_1, C_1 и D_1.

б) Найдите угол B_1C_1A.

в) Пусть дополнительно известно, что радиус сферы равен 2. Найдите объём призмы.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
11 класс

БИЛЕТ 11 ШИФР ______________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$x^{\log_2(8x)} = \frac{x^7}{8}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{1}{2}\left|\cos 2x + \frac{1}{2}\right| = \sin^2 3x - \sin x \sin 3x.$$

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 242400 и таких, что $k^2 + 2k$ делится нацело на 303.

4. Решите систему

$$\begin{cases} 3x \geq 2y + 16, \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 25 - 26x^2 - 26y^2 = 72xy. \end{cases}$$

5. На ребре SA правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S отмечена точка K такая, что $AK : KS = 2 : 3$. Точка K является вершиной прямого кругового конуса, на окружности основания которого лежат три вершины пирамиды $SABCD$.

а) Найдите отношение $CS : CD$.

б) Пусть дополнительно известно, что высота пирамиды $SABCD$ равна 5. Найдите объём конуса.

6. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся такое число a, что система

$$\begin{cases} y = -b - x^2, \\ x^2 + y^2 + 8a^2 = 4 + 4a(x + y) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

7. В углы A и B треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Данные окружности касаются стороны AB в точках K_1, K_2 и K соответственно, при этом $AK_1 = 4$, $BK_2 = 6$, и $AB = 16$.

а) Найдите длину отрезка AK.

б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны AC в точке K_3. Найдите угол CAB, если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 12 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$x^{\log_3\left(27x^2\right)} = \frac{x^9}{81}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{1}{2}\left|\cos 2x - \frac{1}{2}\right| = \cos^2 3x + \cos x \cos 3x.$$

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 353500 и таких, что $k^2 + k$ делится нацело на 505.

4. Решите систему

$$\begin{cases} 2x \geq 14 + y, \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 144 - 40x^2 - 40y^2 = 128xy. \end{cases}$$

5. На ребре SB правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S отмечена точка L такая, что $BL : LS = 2:5$. Точка L является вершиной прямого кругового конуса, на окружности основания которого лежат три вершины пирамиды $SABCD$.

а) Найдите отношение $AS : CD$.

б) Пусть дополнительно известно, что высота пирамиды $SABCD$ равна 7. Найдите объём конуса.

6. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся такое число b, что система

$$\begin{cases} y = x^2 - a, \\ x^2 + y^2 + 8b^2 = 4b(y - x) + 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

7. В углы B и C треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Данные окружности касаются стороны BC в точках K_1, K_2 и K соответственно, при этом $BK_1 = 4$, $CK_2 = 8$, и $BC = 18$.

а) Найдите длину отрезка CK.

б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны AB в точке K_3. Найдите угол ABC, если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
11 класс

БИЛЕТ 13 ШИФР ________________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение
$$x^{\log_2\left(0,25x^3\right)}=512x^4.$$

2. Решите уравнение
$$\frac{1}{2}\left|\cos 2x+\frac{1}{2}\right|=\sin^2 x+\sin x\sin 5x.$$

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 333300 и таких, что k^2-2k делится нацело на 303.

4. Решите систему
$$\begin{cases}2x+y+8\le 0,\\ x^4+2x^2y^2+y^4+9-10x^2-10y^2=8xy.\end{cases}$$

5. На ребре SA правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S отмечена точка K такая, что $AK:KS=1:4$. Точка K является вершиной прямого кругового конуса, на окружности основания которого лежат три вершины пирамиды $SABCD$.

а) Найдите отношение $DS:BC$.

б) Пусть дополнительно известно, что высота пирамиды $SABCD$ равна 5. Найдите объём конуса.

6. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся такое число a, что система
$$\begin{cases}y=b-x^2,\\ x^2+y^2+2a^2=4-2a(x+y)\end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

7. В углы C и B треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Данные окружности касаются стороны BC в точках K_1, K_2 и K соответственно, при этом $CK_1=3$, $BK_2=7$, и $BC=16$.

а) Найдите длину отрезка CK.

б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны AC в точке K_3. Найдите угол ACB, если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 14 ШИФР ________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$x^{\log_5(0{,}008x)} = \frac{125}{x^5}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{1}{2}\left|\cos 2x - \frac{1}{2}\right| = \cos^2 x + \cos x \cos 5x.$$

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 454500 и таких, что $k^2 - k$ делится нацело на 505.

4. Решите систему

$$\begin{cases} x + 3y + 14 \le 0, \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 64 - 20x^2 - 20y^2 = 8xy. \end{cases}$$

5. На ребре SC правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S отмечена точка L такая, что $CL : LS = 1:5$. Точка L является вершиной прямого кругового конуса, на окружности основания которого лежат три вершины пирамиды $SABCD$.

а) Найдите отношение $AS : AB$.

б) Пусть дополнительно известно, что высота пирамиды $SABCD$ равна 6. Найдите объём конуса.

6. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся такое число b, что система

$$\begin{cases} y = x^2 + a, \\ x^2 + y^2 + 2b^2 = 2b(x - y) + 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

7. В углы C и A треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Данные окружности касаются стороны AC в точках K_1, K_2 и K соответственно, при этом $CK_1 = 6$, $AK_2 = 8$, и $AC = 21$.

а) Найдите длину отрезка CK.

б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны BC в точке K_3. Найдите угол BCA, если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3.