МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
10 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\frac{|\cos x| - \cos 3x}{\cos x \sin 2x} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

2. Дан правильный 20-угольник M. Найдите количество четвёрок вершин этого 20-угольника, являющихся вершинами выпуклых четырёхугольников, у которых есть хотя бы одна пара параллельных сторон.

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 291000 и таких, что $k^2 - 1$ делится нацело на 291.

4. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 2, \\ 81x^4 - 18x^2y^2 + y^4 - 360x^2 - 40y^2 + 400 = 0. \end{cases}$$

5. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases} x = |y - b| + \frac{3}{b}, \\ x^2 + y^2 + 32 = a(2y - a) + 12x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

6. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Две окружности Ω_1 и Ω_2 равных радиусов с центрами O_1 и O_2 вписаны в углы BAD и BCD соответственно, при этом первая касается стороны AD в точке K, а вторая касается стороны BC в точке T.

а) Найдите радиус окружности Ω_1, если $AK = 2$, $CT = 8$.

б) Пусть дополнительно известно, что точка O_2 является центром окружности, описанной около треугольника BOC. Найдите угол BDC.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
10 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\frac{|\sin x| - \sin 3x}{\cos x \cos 2x} = 2\sqrt{3}.$$

2. Дан правильный 16-угольник M. Найдите количество четвёрок вершин этого 16-угольника, являющихся вершинами выпуклых четырёхугольников, у которых есть хотя бы одна пара параллельных сторон.

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 445000 и таких, что $k^2 - 1$ делится нацело на 445.

4. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 1, \\ 16x^4 - 8x^2y^2 + y^4 - 40x^2 - 10y^2 + 25 = 0. \end{cases}$$

5. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся число b такое, что система

$$\begin{cases} x = |y + a| + \dfrac{4}{a}, \\ x^2 + y^2 + 24 + b(2y + b) = 10x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

6. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Две окружности Ω_1 и Ω_2 равных радиусов с центрами O_1 и O_2 вписаны в углы ABC и ADC соответственно, при этом первая касается стороны BC в точке K, а вторая касается стороны AD в точке T.

а) Найдите радиус окружности Ω_1, если $BK = 3\sqrt{3}$, $DT = \sqrt{3}$.

б) Пусть дополнительно известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника BOC. Найдите угол BDC.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
10 класс

БИЛЕТ 3 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\frac{|\cos x| + \cos 3x}{\sin x \cos 2x} = -2\sqrt{3}.$$

2. Дан правильный 22-угольник M. Найдите количество четвёрок вершин этого 22-угольника, являющихся вершинами выпуклых четырёхугольников, у которых есть хотя бы одна пара параллельных сторон.

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 485000 таких, что $k^2 - 1$ делится нацело на 485.

4. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 2, \\ x^4 - 8x^2y^2 + 16y^4 - 20x^2 - 80y^2 + 100 = 0. \end{cases}$$

5. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases} x = \dfrac{7}{b} - |y + b|, \\ x^2 + y^2 + 96 = -a(2y + a) - 20x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

6. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Две окружности Ω_1 и Ω_2 равных радиусов с центрами O_1 и O_2 вписаны в углы BAD и BCD соответственно, при этом первая касается стороны AB в точке L, а вторая касается стороны BC в точке F.

а) Найдите радиус окружности Ω_2, если $AL = \sqrt{2}$, $CF = 2\sqrt{2}$.

б) Пусть дополнительно известно, что точка O_2 является центром окружности, описанной около треугольника BOC. Найдите угол BDC.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
10 класс

БИЛЕТ 4 ШИФР ______________________________
заполняется ответственным секретарём

1. Решите уравнение

$$\frac{|\sin x| + \sin 3x}{\cos x \cos 2x} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

2. Дан правильный 18-угольник M. Найдите количество четвёрок вершин этого 18-угольника, являющихся вершинами выпуклых четырёхугольников, у которых есть хотя бы одна пара параллельных сторон.

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих $267\,000$ и таких, что $k^2 - 1$ делится нацело на 267.

4. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 1, \\ x^4 - 18x^2y^2 + 81y^4 - 20x^2 - 180y^2 + 100 = 0. \end{cases}$$

5. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся число b такое, что система

$$\begin{cases} x = \dfrac{6}{a} - |y - a|, \\ x^2 + y^2 + b^2 + 63 = 2(by - 8x) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

6. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Две окружности Ω_1 и Ω_2 равных радиусов с центрами O_1 и O_2 вписаны в углы ABC и ADC соответственно, при этом первая касается стороны BC в точке F, а вторая касается стороны AD в точке P.

а) Найдите радиус окружности Ω_2, если $BF = 3\sqrt{2}$, $DP = \sqrt{2}$.

б) Пусть дополнительно известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника BOC. Найдите угол BDC.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
10 класс

БИЛЕТ 5 ШИФР _______________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2-25}\cdot\sqrt{-2x-1}\le x^2-25.$$

2. Дана функция $g(x)=\dfrac{4\sin^4 x+5\cos^2 x}{4\cos^4 x+3\sin^2 x}$. Найдите:

а) корни уравнения $g(x)=\dfrac{7}{5}$;

б) наибольшее и наименьшее значения функции $g(x)$.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=-\dfrac{2}{15},\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}=-\dfrac{2}{3},\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=-\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM:MC=2:5$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка F такая, что $MF:FC=1:4$. Пусть дополнительно известно, что прямые LF и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

5. Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих условию $5x^2-6xy+y^2=6^{100}$.

6. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся число b такое, что система

$$\begin{cases}x^2+y^2+2a(a+y-x)=49,\\ y=\dfrac{8}{(x-b)^2+1}\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
10 класс

БИЛЕТ 6 ШИФР ________________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2-16}\cdot\sqrt{2x-1}\le x^2-16\,.$$

2. Дана функция $g(x)=\dfrac{2\cos^4 x+\sin^2 x}{2\sin^4 x+3\cos^2 x}$. Найдите:

а) корни уравнения $g(x)=\dfrac{1}{2}$;

б) наибольшее и наименьшее значения функции $g(x)$.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{1}{12},\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{1}{6},\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM:MC=2:7$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка T такая, что $MT:TC=1:6$. Пусть дополнительно известно, что прямые LT и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

5. Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих условию $6x^2-7xy+y^2=10^{100}$.

6. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases}x^2+y^2+2b(b-x+y)=4,\\ y=\dfrac{9}{(x+a)^2+1}\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
10 класс

БИЛЕТ 7 ШИФР ____________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2-9}\cdot\sqrt{-2x-1}\le x^2-9.$$

2. Дана функция $g(x)=\dfrac{4\cos^4 x+5\sin^2 x}{4\sin^4 x+3\cos^2 x}$. Найдите:

а) корни уравнения $g(x)=\dfrac{4}{3}$;

б) наибольшее и наименьшее значения функции $g(x)$.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=1,\\[2mm] \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{4}{3},\\[2mm] \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=-\dfrac{4}{5}.\end{cases}$$

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM:MC=3:8$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка F такая, что $MF:FC=1:7$. Пусть дополнительно известно, что прямые LF и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

5. Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих условию $x^2+6xy+5y^2=10^{100}$.

6. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся число b такое, что система

$$\begin{cases}x^2+y^2+2a(a-x-y)=64,\\ y=\dfrac{7}{(x+b)^2+1}\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
10 класс

БИЛЕТ 8 ШИФР ______________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2-4}\cdot\sqrt{2x-1}\le x^2-4.$$

2. Дана функция $g(x)=\dfrac{4\sin^4 x+7\cos^2 x}{4\cos^4 x+\sin^2 x}$. Найдите:

а) корни уравнения $g(x)=4$;

б) наибольшее и наименьшее значения функции $g(x)$.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{6}{5},\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{3}{4},\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{2}{3}.\end{cases}$$

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM:MC=3:7$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка T такая, что $MT:TC=1:6$. Пусть дополнительно известно, что прямые LT и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

5. Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих условию $x^2+7xy+6y^2=15^{50}$.

6. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases}x^2+y^2+2b(b+x+y)=81,\\ y=\dfrac{5}{(x-a)^2+1}\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
10 класс

БИЛЕТ 11 ШИФР ______________________

заполняется ответственным секретарём

1. Известно, что $\sin x = 2\cos y - \frac{5}{2}\sin y$, $\cos x = 2\sin y - \frac{5}{2}\cos y$. Найдите $\sin 2y$.

2. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 242400 и таких, что $k^2 + 2k$ делится нацело на 303.

3. Решите систему

$$\begin{cases} 3x \geq 2y + 16, \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 25 - 26x^2 - 26y^2 = 72xy. \end{cases}$$

4. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся такое число a, что система

$$\begin{cases} y = -b - x^2, \\ x^2 + y^2 + 8a^2 = 4 + 4a(x + y) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

5. Дан правильный 20-угольник M. Найдите количество четвёрок вершин этого 20-угольника, являющихся вершинами трапеций.

6. В углы A и B треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Данные окружности касаются стороны AB в точках K_1, K_2 и K соответственно, при этом $AK_1 = 4$, $BK_2 = 6$, и $AB = 16$.

а) Найдите длину отрезка AK.

б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны AC в точке K_3. Найдите угол CAB, если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
10 класс

БИЛЕТ 12 ШИФР ______________________________
заполняется ответственным секретарём

1. Известно, что $\sin y = \frac{3}{2}\sin x + \frac{2}{3}\cos x$, $\cos y = \frac{2}{3}\sin x + \frac{3}{2}\cos x$. Найдите $\sin 2x$.

2. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 353500 и таких, что $k^2 + k$ делится нацело на 505.

3. Решите систему

$$\begin{cases} 2x \geq 14 + y, \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 144 - 40x^2 - 40y^2 = 128xy. \end{cases}$$

4. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся такое число b, что система

$$\begin{cases} y = x^2 - a, \\ x^2 + y^2 + 8b^2 = 4b(y - x) + 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

5. Дан правильный 16-угольник M. Найдите количество четвёрок вершин этого 16-угольника, являющихся вершинами трапеций.

6. В углы B и C треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Данные окружности касаются стороны BC в точках K_1, K_2 и K соответственно, при этом $BK_1 = 4$, $CK_2 = 8$, и $BC = 18$.

а) Найдите длину отрезка CK.

б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны AB в точке K_3. Найдите угол ABC, если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
10 класс

БИЛЕТ 13 ШИФР ____________________

заполняется ответственным секретарём

1. Известно, что $\sin y = 2\cos x + \frac{5}{2}\sin x$, $\cos y = 2\sin x + \frac{5}{2}\cos x$. Найдите $\sin 2x$.

2. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 333300 и таких, что $k^2 - 2k$ делится нацело на 303.

3. Решите систему

$$\begin{cases} 2x + y + 8 \le 0, \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 9 - 10x^2 - 10y^2 = 8xy. \end{cases}$$

4. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся такое число a, что система

$$\begin{cases} y = b - x^2, \\ x^2 + y^2 + 2a^2 = 4 - 2a(x + y) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

5. Дан правильный 22-угольник M. Найдите количество четвёрок вершин этого 22-угольника, являющихся вершинами трапеций.

6. В углы C и B треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Данные окружности касаются стороны BC в точках K_1, K_2 и K соответственно, при этом $CK_1 = 3$, $BK_2 = 7$, и $BC = 16$.

а) Найдите длину отрезка CK.

б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны AC в точке K_3. Найдите угол ACB, если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
10 класс

БИЛЕТ 14 ШИФР ________________________________

заполняется ответственным секретарём

1. Известно, что $\sin x = \frac{3}{2}\sin y - \frac{2}{3}\cos y$, $\cos x = \frac{3}{2}\cos y - \frac{2}{3}\sin y$. Найдите $\sin 2y$.

2. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 454500 и таких, что $k^2 - k$ делится нацело на 505.

3. Решите систему

$$\begin{cases} x + 3y + 14 \le 0, \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 64 - 20x^2 - 20y^2 = 8xy. \end{cases}$$

4. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся такое число b, что система

$$\begin{cases} y = x^2 + a, \\ x^2 + y^2 + 2b^2 = 2b(x - y) + 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

5. Дан правильный 18-угольник M. Найдите количество четвёрок вершин этого 18-угольника, являющихся вершинами трапеций.

6. В углы C и A треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Данные окружности касаются стороны AC в точках K_1, K_2 и K соответственно, при этом $CK_1 = 6$, $AK_2 = 8$, и $AC = 21$.

а) Найдите длину отрезка CK.

б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны BC в точке K_3. Найдите угол BCA, если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3.