1. Решите уравнение $\dfrac{|\cos x|-\cos 3x}{\cos x\sin 2x}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Ответ. $x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$, $x=\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi, k\in Z$.

Решение. Возможны два случая.

а) $\cos x\geq 0$. Тогда $\dfrac{\cos x-\cos 3x}{\cos x\sin 2x}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\dfrac{2\sin x\sin 2x}{\cos x\sin 2x}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow \operatorname{tg}x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$. Учитывая условие, получаем $x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$.

б) $\cos x<0$. Тогда $\dfrac{-\cos x-\cos 3x}{\cos x\sin 2x}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\dfrac{-2\cos x\cos 2x}{\cos x\sin 2x}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow \operatorname{ctg}2x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi k}{2}, k\in Z$. Косинус отрицателен при $x=\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi, k\in Z$ и при $x=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$.

2. Решите уравнение $\left(\dfrac{3x}{2}\right)^{\log_3(8x)}=\dfrac{x^7}{8}$.

Ответ. $x=\dfrac{729}{8}$, $x=2$.

Решение. Логарифмируя по основанию 3, получаем уравнение, равносильное исходному:

$$\log_3(8x)\cdot\log_3\left(\frac{3x}{2}\right)=\log_3\left(\frac{x^7}{8}\right)\Leftrightarrow\left(\log_3 x+3\log_3 2\right)\left(1+\log_3 x-\log_3 2\right)=7\log_3 x-3\log_3 2.$$

Обозначим $\log_3 x=y$, $\log_3 2=a$. После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых уравнение принимает вид $y^2+(2a-6)y-3a^2+6a=0$. Решаем квадратное уравнение относительно y:

$$\frac{D}{4}=(a-3)^2+\left(3a^2-6a\right)=4a^2-12a+9=(2a-3)^2,\ y=3-a\pm(2a-3)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=a,\\ y=6-3a.\end{array}\right.$$

Находим x: если $y=a$, то $\log_3 x=\log_3 2$ и $x=2$; если $y=6-3a$, то $\log_3 x=6-3\log_3 2$ и $x=\dfrac{729}{8}$.

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 291000 и таких, что k^2-1 делится нацело на 291.

Ответ. 4000.

Решение. Разложив делимое и делитель на множители, получаем условие $(k-1)(k+1)\,\vdots\,(3\cdot 97)$. Значит, одно из чисел $(k+1)$ или $(k-1)$ делится на 97. Рассмотрим два случая.

а) $(k+1)\,\vdots\,97$, т.е. $k=97p+96, p\in Z$. Тогда получаем $(97p+95)(97p+97)\,\vdots\,(3\cdot 97)\Leftrightarrow(97p+95)(p+1)\,\vdots\,3$. Первый множитель делится на 3 при $p=3q+1, q\in Z$, а второй – при $p=3q+2, q\in Z$, откуда получаем, что $k=291q+193$, $k=291q+290$, $q\in Z$.

б) $(k-1)\,\vdots\,97$, т.е. $k=97p+1, p\in Z$. Тогда получаем $97p(97p+2)\,\vdots\,(3\cdot 97)\Leftrightarrow(97p+2)p\,\vdots\,3$. Первый множитель делится на 3 при $p=3q+1, q\in Z$, а второй – при $p=3q, q\in Z$, откуда получаем, что $k=291q+98$, $k=291q+1$, $q\in Z$.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа, дающие остатки $193, 290, 98, 1$ при делении на 291, то есть подходят каждые 4 из 291 подряд идущих чисел. Так как $291000=291\cdot 1000$, получаем $4\cdot 1000=4000$ чисел.

4. Решите систему $\begin{cases}x^2+y^2\leq 2,\\ 81x^4-18x^2y^2+y^4-360x^2-40y^2+400=0.\end{cases}$

Ответ. $\left(-\dfrac{3}{\sqrt{5}};\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\dfrac{3}{\sqrt{5}};-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\dfrac{3}{\sqrt{5}};-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\dfrac{3}{\sqrt{5}};\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Решение. Преобразуем уравнение системы:

$81x^4-18x^2y^2+y^4-360x^2-40y^2+400=0 \Leftrightarrow 81x^4+18x^2y^2+y^4-360x^2-40y^2+400=36x^2y^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(9x^2+y^2\right)^2-40\left(9x^2+y^2\right)+400=36x^2y^2 \Leftrightarrow \left(9x^2+y^2-20\right)^2=(6xy)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9x^2+y^2-20=6xy, \\ 9x^2+y^2-20=-6xy \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (3x-y)^2=20, \\ (3x+y)^2=20 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-y=\pm 2\sqrt{5}, \\ 3x+y=\pm 2\sqrt{5}. \end{array}\right.$$

В каждом из четырёх случаев выражаем y и подставляем в неравенство.

Если $y=3x+2\sqrt{5}$, то $x^2+\left(3x+2\sqrt{5}\right)^2\le 2$, $10x^2+12x\sqrt{5}+18\le 0$, $\left(x\sqrt{10}+3\sqrt{2}\right)^2\le 0$, $x=-\frac{3}{\sqrt{5}}$. Тогда $y=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Остальные случаи разбираются аналогично. В итоге получаем 4 решения: $\left(-\frac{3}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\frac{3}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{3}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{3}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

5. На ребре AA_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка T такая, что $AT:A_1T=4:1$. Точка T является вершиной прямого кругового конуса такого, что три вершины призмы принадлежат окружности его основания.

а) Найдите отношение высоты призмы к ребру её основания.

б) Пусть дополнительно известно, что $BB_1=5$. Найдите объём конуса.

Ответ. а) $\sqrt{\frac{5}{3}}$; б) $V=\frac{1280\pi}{29\sqrt{29}}$.

Решение. Если три вершины призмы лежат на окружности основания конуса, то это означает, что три вершины призмы равноудалены от точки T, т.е. три из отрезков TA, TB, TC, TA_1, TB_1, TC_1 равны между собой. Заметим, что $TB_1=TC_1<TB=TC$; кроме того $TB>TA$, $TB_1>TA_1$. Из этих неравенств следует, что отрезки TB и TC самые длинные, а отрезок TA_1 – самый короткий. Значит, равны между собой отрезки TA, TB_1 и TC_1.

а) Обозначим $TA_1=x$, $TA=4x$. Тогда $TB_1=4x$. По теореме Пифагора для треугольника A_1B_1T находим, что $A_1B_1=x\sqrt{15}$. Значит, искомое отношение равно $\frac{5x}{x\sqrt{15}}=\sqrt{\frac{5}{3}}$.

б) Из треугольника A_1B_1A по теореме Пифагора получаем, что $AB_1=2x\sqrt{10}$. Радиус основания конуса – это радиус окружности, описанной около треугольника AB_1C_1. Его стороны: $AB_1=AC_1=2x\sqrt{10}$, $B_1C_1=x\sqrt{15}$. Тогда находим его высоту: $AH=\frac{x\sqrt{145}}{2}$, площадь: $S=\frac{1}{2}\cdot x\sqrt{15}\cdot\frac{x\sqrt{145}}{2}=\frac{5x^2\sqrt{87}}{4}$, радиус описанной окружности: $R=\frac{2x\sqrt{10}\cdot 2x\sqrt{10}\cdot x\sqrt{15}}{4S}=\frac{8x\sqrt{5}}{\sqrt{29}}$.

Образующая конуса – это отрезок AT, т.е. она равна $4x$. Тогда высота конуса $h=\sqrt{16x^2-\frac{320x^2}{29}}=\frac{12x}{\sqrt{29}}$.

Находим объём конуса: $V=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{320x^2}{29}\cdot\frac{12x}{\sqrt{29}}=\frac{1280\pi x^3}{29\sqrt{29}}$. Так как $x=1$, окончательно получаем $V=\frac{1280\pi}{29\sqrt{29}}$.

6. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases} x=|y-b|+\frac{3}{b}, \\ x^2+y^2+32=a(2y-a)+12x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

Ответ. $b\in(-\infty\ 0)\cup\left[\frac{3}{8};+\infty\right)$.

Решение. Второе уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x-6)^2+(y-a)^2=2^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 2 с центром $(6;a)$. При всевозможных $a\in\mathrm{R}$ эти окружности заметают полосу $4\le x\le 8$.

Первое уравнение задаёт “уголок” с ветвями, направленными вправо, с вершиной в точке $\left(\frac{3}{b};b\right)$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы “уголок”, задаваемый первым уравнением, имел хотя бы одну общую точку с полосой $4\le x\le 8$, а для этого нужно, чтобы абсцисса его вершины удовлетворяла неравенству $x_{\text{в}}\le 8$, т.е $\frac{3}{b}\le 8$ откуда $b\in(-\infty\ 0)\cup\left[\frac{3}{8};+\infty\right)$.

7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Две окружности Ω_1 и Ω_2 равных радиусов с центрами O_1 и O_2 вписаны в углы BAD и BCD соответственно, при этом первая касается стороны AD в точке K, а вторая касается стороны BC в точке T.

а) Найдите радиус окружности Ω_1, если $AK=2$, $CT=8$.

б) Пусть дополнительно известно, что точка O_2 является центром окружности, описанной около треугольника BOC. Найдите угол BDC.

Ответ. а) $r=4$, б) $\angle BDC=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ или $\angle BDC=\pi-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Решение. а) Отрезки AO_1 и CO_2 являются биссектрисами углов BAD и BCD (центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла). Так как четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, сумма его противоположных углов BAD и BCD равна 180°, поэтому сумма их половин – углов KAO_1 и TCO_2 – равна 90°. Пусть $\angle O_1AK=\alpha$. Тогда $\angle TO_2C=90^\circ-\angle TCO_2=\alpha$. Выражая двумя способами $\operatorname{tg}\alpha$, получаем: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{O_1K}{AK}=\frac{CT}{O_2T}$, $\frac{r}{2}=\frac{8}{r}$, $r=4$.

б) $O_2B=O_2C$ как радиусы окружности, описанной около треугольника BOC, поэтому высота этого треугольника O_2T также является его медианой. Точки O, O_2 и T лежат на одной прямой (на серединном перпендикуляре к отрезку BC). Далее находим: $O_2C=\sqrt{O_2T^2+CT^2}=4\sqrt{5}$, $O_2O=O_2C=4\sqrt{5}$ (как радиусы одной окружности)

Возможны два случая: точки O_2 и O могут лежать либо по одну сторону от прямой BC, либо по разные стороны от неё.

В первом случае получаем: $\angle BDC=\frac{1}{2}\angle BOC=\angle COT=\operatorname{arctg}\frac{CT}{OT}=\operatorname{arctg}\frac{8}{4+4\sqrt{5}}=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Во втором случае: $\angle BDC=\pi-\frac{1}{2}\angle BOC=\pi-\angle COT=\pi-\operatorname{arctg}\frac{CT}{OT}=\pi-\operatorname{arctg}\frac{8}{4\sqrt{5}-4}=\pi-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

1. Решите уравнение $\dfrac{|\sin x|-\sin 3x}{\cos x\cos 2x}=2\sqrt{3}$.

Ответ. $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$, $x=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$, $k\in Z$.

Решение. Возможны два случая.

а) $\sin x\ge 0$. Тогда $\dfrac{\sin x-\sin 3x}{\cos x\cos 2x}=2\sqrt{3}\Leftrightarrow\dfrac{-2\sin x\cos 2x}{\cos x\cos 2x}=2\sqrt{3}\Leftrightarrow \operatorname{tg} x=-\sqrt{3}\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z$. Учитывая условие, получаем $x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in Z$.

б) $\sin x<0$. Тогда $\dfrac{-\sin x-\sin 3x}{\cos x\cos 2x}=2\sqrt{3}\Leftrightarrow\dfrac{-2\cos x\sin 2x}{\cos x\cos 2x}=2\sqrt{3}\Leftrightarrow \operatorname{tg} 2x=-\sqrt{3}\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{2}, k\in Z$. Синус отрицателен при $x=-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in Z$ и при $x=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$.

2. Решите уравнение $\left(\dfrac{x}{243}\right)^{\log_2\left(\frac{9x}{4}\right)}=\dfrac{729}{x^4}$.

Ответ. $x=\dfrac{243}{4}$, $x=\dfrac{1}{9}$.

Решение. Логарифмируя по основанию 2, получаем уравнение, равносильное исходному:

$$\log_2\left(\frac{x}{243}\right)\cdot\log_2\left(\frac{9x}{4}\right)=\log_2\left(\frac{729}{x^4}\right)\Leftrightarrow\left(\log_2 x-5\log_2 3\right)\left(-2+\log_2 x+2\log_2 3\right)=6\log_2 3-4\log_2 x.$$

Обозначим $\log_2 x=y$, $\log_2 3=a$. После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых уравнение принимает вид $y^2-(3a-2)y+4a-10a^2=0$. Решаем квадратное уравнение относительно y:

$$D=(3a-2)^2-4\left(4a-10a^2\right)=49a^2-28a+4=(7a-2)^2,\ y=\frac{3a-2\pm(7a-2)}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=5a-2,\\ y=-2a.\end{array}\right.$$

Находим x: если $y=-2a$, то $\log_2 x=-2\log_2 3$ и $x=\dfrac{1}{9}$; если $y=5a-2$, то $\log_2 x=5\log_2 3-2$ и $x=\dfrac{243}{4}$.

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих $445\,000$ и таких, что k^2-1 делится нацело на 445.

Ответ. 4000.

Решение. Разложив делимое и делитель на множители, получаем условие $(k-1)(k+1)\,\vdots\,(5\cdot 89)$. Значит, одно из чисел $(k+1)$ или $(k-1)$ делится на 89. Рассмотрим два случая.

а) $(k+1)\,\vdots\,89$, т.е. $k=89p+88, p\in Z$. Тогда получаем $(89p+87)(89p+89)\,\vdots\,(5\cdot 89)\Leftrightarrow(89p+87)(p+1)\,\vdots\,5$. Первый множитель делится на 5 при $p=5q+2, q\in Z$, а второй – при $p=5q+4, q\in Z$, откуда получаем, что $k=445q+276$, $k=445q+444$, $q\in Z$.

б) $(k-1)\,\vdots\,89$, т.е. $k=89p+1, p\in Z$. Тогда получаем $89p(89p+2)\,\vdots\,(5\cdot 89)\Leftrightarrow(89p+2)p\,\vdots\,5$. Первый множитель делится на 5 при $p=5q+2, q\in Z$, а второй – при $p=5q, q\in Z$, откуда получаем, что $k=445q+179$, $k=445q+1$, $q\in Z$.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа, дающие остатки $276, 444, 179, 1$ при делении на 445, то есть подходят каждые 4 из 445 подряд идущих чисел. Так как $445000=445\cdot 1000$, получаем $4\cdot 1000=4000$ чисел.

4. Решите систему $\begin{cases}x^2+y^2\le 1,\\ 16x^4-8x^2y^2+y^4-40x^2-10y^2+25=0.\end{cases}$

Ответ. $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}};\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}};-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}};-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}};\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Решение. Преобразуем уравнение системы:

$16x^4-8x^2y^2+y^4-40x^2-10y^2+25=0 \Leftrightarrow 16x^4+8x^2y^2+y^4-40x^2-10y^2+25=16x^2y^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(4x^2+y^2\right)^2-10\left(4x^2+y^2\right)+25=16x^2y^2 \Leftrightarrow \left(4x^2+y^2-5\right)^2=(4xy)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x^2+y^2-5=4xy,\\ 4x^2+y^2-5=-4xy\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(2x-y)^2=5,\\ (2x+y)^2=5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-y=\pm\sqrt{5},\\ 2x+y=\pm\sqrt{5}.\end{array}\right.$$

В каждом из четырёх случаев выражаем y и подставляем в неравенство.

Если $y=2x+\sqrt{5}$, то $x^2+\left(2x+\sqrt{5}\right)^2\le 1$, $5x^2+4x\sqrt{5}+4\le 0$, $\left(x\sqrt{5}+2\right)^2\le 0$, $x=-\frac{2}{\sqrt{5}}$. Тогда $y=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Остальные случаи разбираются аналогично. В итоге получаем 4 решения: $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

5. На ребре BB_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка T такая, что $BT:B_1T=2:5$. Точка T является вершиной прямого кругового конуса такого, что три вершины призмы принадлежат окружности его основания.

а) Найдите отношение высоты призмы к ребру её основания.

б) Пусть дополнительно известно, что $CC_1=7$. Найдите объём конуса.

Ответ. а) $\sqrt{\frac{7}{3}}$; б) $V=\frac{3500\pi}{37\sqrt{37}}$.

Решение. Если три вершины призмы лежат на окружности основания конуса, то это означает, что три вершины призмы равноудалены от точки T, т.е. три из отрезков TA, TB, TC, TA_1, TB_1, TC_1 равны между собой. Заметим, что $TA_1=TC_1>TA=TC$; кроме того $TA>TB$, $TA_1>TB_1$. Из этих неравенств следует, что отрезки TA_1 и TC_1 самые длинные, а отрезок TB – самый короткий. Значит, равны между собой отрезки TA, TC и TB_1.

а) Обозначим $TB_1=5x$, $TB=2x$. Тогда $TA=5x$. По теореме Пифагора для треугольника ABT находим, что $AB=x\sqrt{21}$. Значит, искомое отношение равно $\frac{7x}{x\sqrt{21}}=\sqrt{\frac{7}{3}}$.

б) Из треугольника BB_1A по теореме Пифагора получаем, что $AB_1=x\sqrt{70}$. Радиус основания конуса – это радиус окружности, описанной около треугольника AB_1C. Его стороны: $AB_1=CB_1=x\sqrt{70}$, $AC=x\sqrt{21}$. Тогда находим его высоту: $B_1H=\frac{x\sqrt{259}}{2}$, площадь: $S=\frac{1}{2}\cdot x\sqrt{21}\cdot\frac{x\sqrt{259}}{2}=\frac{7x^2\sqrt{111}}{4}$, радиус описанной окружности: $R=\frac{x\sqrt{70}\cdot x\sqrt{70}\cdot x\sqrt{21}}{4S}=\frac{10x\sqrt{7}}{\sqrt{37}}$.

Образующая конуса – это отрезок AT, т.е. она равна $5x$. Тогда высота конуса $h=\sqrt{25x^2-\frac{700x^2}{37}}=\frac{15x}{\sqrt{37}}$.

Находим объём конуса: $V=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{700x^2}{37}\cdot\frac{15x}{\sqrt{37}}=\frac{3500\pi x^3}{37\sqrt{37}}$. Так как $x=1$, окончательно получаем $V=\frac{3500\pi}{37\sqrt{37}}$.

6. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся число b такое, что система

$$\begin{cases}x=|y+a|+\frac{4}{a},\\ x^2+y^2+24+b(2y+b)=10x\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

Ответ. $a\in(-\infty\ 0)\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$.

Решение. Второе уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x-5)^2+(y+b)^2=1^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 1 с центром $(5;-b)$. При всевозможных $b\in\mathrm{R}$ эти окружности заметают полосу $4\le x\le 6$.

Первое уравнение задаёт “уголок” с ветвями, направленными вправо, с вершиной в точке $\left(\frac{4}{a};-a\right)$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы “уголок”, задаваемый первым уравнением, имел хотя бы одну общую точку с полосой $4\le x\le 6$, а для этого нужно, чтобы абсцисса его вершины удовлетворяла неравенству $x_{\text{в}}\le 6$, т.е $\frac{4}{a}\le 6$ откуда $a\in(-\infty\ 0)\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$.

7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Две окружности Ω_1 и Ω_2 равных радиусов с центрами O_1 и O_2 вписаны в углы ABC и ADC соответственно, при этом первая касается стороны BC в точке K, а вторая касается стороны AD в точке T.

а) Найдите радиус окружности Ω_1, если $BK=3\sqrt{3}$, $DT=\sqrt{3}$.

б) Пусть дополнительно известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника BOC. Найдите угол BDC.

Ответ. а) $r=3$, б) $\angle BDC=30^\circ$.

Решение. а) Отрезки BO_1 и DO_2 являются биссектрисами углов ABC и ADC (центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла). Так как четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, сумма его противоположных углов ABC и ADC равна 180°, поэтому сумма их половин – углов KBO_1 и TDO_2 – равна 90°. Пусть $\angle O_1BK=\alpha$. Тогда $\angle TO_2D=90^\circ-\angle TDO_2=\alpha$. Выражая двумя способами $\operatorname{tg}\alpha$, получаем: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{O_1K}{BK}=\frac{DT}{O_2T}$, $\frac{r}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{r}$, $r=3$.

б) $O_1B=O_1C$ как радиусы окружности, описанной около треугольника BOC, поэтому высота O_1K этого треугольника также является его медианой. Точки O, O_1 и K лежат на одной прямой (на серединном перпендикуляре к отрезку BC). Далее находим: $O_1B=\sqrt{O_1K^2+KB^2}=6$, $O_1O=O_1B=6$ (как радиусы одной окружности).

Возможны два случая: точки O_1 и O могут лежать либо по одну сторону от прямой BC, либо по разные стороны от неё.

В первом случае получаем: $\angle BDC=\frac{1}{2}\angle BOC=\angle BOK=\operatorname{arctg}\frac{BK}{KO}=\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{3}}{9}=30^\circ$.

Рассмотрим второй случай. Точка O_1 лежит на биссектрисе угла ABC, поэтому

$$\angle ABC=2\angle O_1BK=2\operatorname{arctg}\frac{O_1K}{BK}=2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=60^\circ.$$

Это означает, что вписанный угол ABC опирается на дугу AC, равную 120°. Вместе с тем дуга BC равна углу BOC, а $\angle BOC=2\angle BOK=2\operatorname{arctg}\frac{BK}{OK}=2\operatorname{arctg}\frac{BK}{O_1O-r}=2\operatorname{arctg}\sqrt{3}=120^\circ$, что невозможно, так как в этом случае дуга AC должна быть меньше дуги BC.

1. Решите уравнение $\dfrac{|\cos x|+\cos 3x}{\sin x\cos 2x}=-2\sqrt{3}$.

Ответ. $x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$, $x=\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi$, $x=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$, $k\in Z$.

Решение. Возможны два случая.

а) $\cos x\ge 0$. Тогда $\dfrac{\cos x+\cos 3x}{\sin x\cos 2x}=-2\sqrt{3}\Leftrightarrow\dfrac{2\cos x\cos 2x}{\sin x\cos 2x}=-2\sqrt{3}\Leftrightarrow \operatorname{ctg} x=-\sqrt{3}\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$. Учитывая условие, получаем $x=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$.

б) $\cos x<0$. Тогда $\dfrac{-\cos x+\cos 3x}{\sin x\cos 2x}=2\sqrt{3}\Leftrightarrow\dfrac{-2\sin x\sin 2x}{\sin x\cos 2x}=-2\sqrt{3}\Leftrightarrow \operatorname{tg} 2x=\sqrt{3}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{2}, k\in Z$. Косинус отрицателен при $x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in Z$ и при $x=\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$.

2. Решите уравнение $\left(\dfrac{x}{400}\right)^{\log_5\left(\frac{x}{8}\right)}=\dfrac{1024}{x^3}$.

Ответ. $x=\dfrac{8}{5}$, $x=16$.

Решение. Логарифмируя по основанию 3, получаем уравнение, равносильное исходному:

$$\log_5\left(\frac{x}{400}\right)\cdot\log_5\left(\frac{x}{8}\right)=\log_5\left(\frac{1024}{x^3}\right)\Leftrightarrow\left(\log_5 x-2-4\log_5 2\right)\left(\log_5 x-3\log_5 2\right)=10\log_5 2-3\log_5 x.$$

Обозначим $\log_5 x=y$, $\log_5 2=a$. После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых уравнение принимает вид $y^2-(7a-1)y+12a^2-4a=0$. Решаем квадратное уравнение относительно y:

$$D=(7a-1)^2-4\left(12a^2-4a\right)=a^2+2a+1=(a+1)^2,\ y=\frac{7a-1\pm(a+1)}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=4a,\\ y=3a-1.\end{array}\right.$$

Находим x: если $y=4a$, то $\log_5 x=4\log_5 2$ и $x=16$; если $y=3a-1$, то $\log_5 x=3\log_5 2-1$ и $x=\dfrac{8}{5}$.

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих $485\,000$ таких, что k^2-1 делится нацело на 485.

Ответ. 4000.

Решение. Разложив делимое и делитель на множители, получаем условие $(k-1)(k+1)\,\vdots\,(5\cdot 97)$. Значит, одно из чисел $(k+1)$ или $(k-1)$ делится на 97. Рассмотрим два случая.

а) $(k+1)\,\vdots\,97$, т.е. $k=97p+96, p\in Z$. Тогда получаем $(97p+95)(97p+97)\,\vdots\,(5\cdot 97)\Leftrightarrow(97p+95)(p+1)\,\vdots\,5$. Первый множитель делится на 5 при $p=5q, q\in Z$, а второй – при $p=5q+4, q\in Z$, откуда получаем, что $k=485q+96$, $k=485q+484$, $q\in Z$.

б) $(k-1)\,\vdots\,97$, т.е. $k=97p+1, p\in Z$. Тогда получаем $97p(97p+2)\,\vdots\,(5\cdot 97)\Leftrightarrow(97p+2)p\,\vdots\,5$. Первый множитель делится на 5 при $p=5q+4, q\in Z$, а второй – при $p=5q, q\in Z$, откуда получаем, что $k=485q+389$, $k=485q+1$, $q\in Z$.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа, дающие остатки $96, 484, 389, 1$ при делении на 485, то есть подходят каждые 4 из 485 подряд идущих чисел. Так как $485\,000=485\cdot 1000$, получаем $4\cdot 1000=4000$ чисел.

4. Решите систему $\begin{cases}x^2+y^2\le 2,\\ x^4-8x^2y^2+16y^4-20x^2-80y^2+100=0.\end{cases}$

Ответ. $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}};\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}};\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}};-\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}};-\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$.

Решение. Преобразуем уравнение системы:

$x^4-8x^2y^2+16y^4-20x^2-80y^2+100=0 \Leftrightarrow x^4+8x^2y^2+16y^4-20x^2-80y^2+100=16x^2y^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+4y^2\right)^2-20\left(x^2+4y^2\right)+100=16x^2y^2 \Leftrightarrow \left(x^2+4y^2-10\right)^2=(4xy)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+4y^2-10=4xy, \\ x^2+4y^2-10=-4xy \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-2y)^2=10, \\ (x+2y)^2=10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2y=\pm\sqrt{10}, \\ x+2y=\pm\sqrt{10}. \end{array}\right.$$

В каждом из четырёх случаев выражаем x и подставляем в неравенство.

Если $x=2y+\sqrt{10}$, то $y^2+\left(2y+\sqrt{10}\right)^2\le 2$, $5y^2+4y\sqrt{10}+8\le 0$, $\left(y\sqrt{5}+2\sqrt{2}\right)^2\le 0$, $y=-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$. Тогда $x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.

Остальные случаи разбираются аналогично. В итоге получаем 4 решения: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}};\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}};\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}};-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}};-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$.

5. На ребре CC_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка T такая, что $CT:C_1T=1:3$. Точка T является вершиной прямого кругового конуса такого, что три вершины призмы принадлежат окружности его основания.

а) Найдите отношение высоты призмы к ребру её основания.

б) Пусть дополнительно известно, что $BB_1=8$. Найдите объём конуса.

Ответ. а) $\sqrt{2}$; б) $V=\frac{576\pi\sqrt{3}}{11\sqrt{11}}$.

Решение. Если три вершины призмы лежат на окружности основания конуса, то это означает, что три вершины призмы равноудалены от точки T, т.е. три из отрезков TA, TB, TC, TA_1, TB_1, TC_1 равны между собой. Заметим, что $TA_1=TB_1>TA=TB$; кроме того $TA>TC$, $TA_1>TC_1$. Из этих неравенств следует, что отрезки TA_1 и TB_1 самые длинные, а отрезок TC – самый короткий. Значит, равны между собой отрезки TA, TB и TC_1.

а) Обозначим $TC_1=3x$, $TC=x$. Тогда $TA=3x$. По теореме Пифагора для треугольника ACT находим, что $AC=2x\sqrt{2}$. Значит, искомое отношение равно $\frac{4x}{2x\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

б) Из треугольника CC_1A по теореме Пифагора получаем, что $AC_1=2x\sqrt{6}$. Радиус основания конуса – это радиус окружности, описанной около треугольника AC_1B. Его стороны: $AC_1=BC_1=2x\sqrt{6}$, $AB=2x\sqrt{2}$. Тогда находим его высоту: $C_1H=x\sqrt{22}$, площадь: $S=\frac{1}{2}\cdot 2x\sqrt{2}\cdot x\sqrt{22}=2x^2\sqrt{11}$, радиус описанной окружности: $R=\frac{2x\sqrt{6}\cdot 2x\sqrt{6}\cdot 2x\sqrt{2}}{4S}=\frac{6x\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.

Образующая конуса – это отрезок AT, т.е. она равна $3x$. Тогда высота конуса $h=\sqrt{9x^2-\frac{72x^2}{11}}=\frac{3x\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$.

Находим объём конуса: $V=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{72x^2}{11}\cdot\frac{3x\sqrt{3}}{\sqrt{11}}=\frac{72\pi x^3\sqrt{3}}{11\sqrt{11}}$. Так как $x=2$, окончательно получаем $V=\frac{576\pi\sqrt{3}}{11\sqrt{11}}$.

6. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases} x=\frac{7}{b}-|y+b|, \\ x^2+y^2+96=-a(2y+a)-20x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

Ответ. $b\in\left(-\infty;-\frac{7}{12}\right]\cup(0;+\infty)$.

Решение. Второе уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x+10)^2+(y+a)^2=2^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 2 с центром $(-10;-a)$. При всевозможных $a\in\mathrm{R}$ эти окружности заметают полосу $-12\le x\le -8$.

Первое уравнение задаёт “уголок” с ветвями, направленными влево, с вершиной в точке $\left(\frac{7}{b};-b\right)$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы “уголок”, задаваемый первым уравнением, имел хотя бы одну общую точку с полосой $-12\le x\le -8$, а для этого нужно, чтобы абсцисса его вершины удовлетворяла неравенству $x_{\text{в}}\ge -12$, т.е $\frac{7}{b}\ge -12$ откуда $b\in\left(-\infty;-\frac{7}{12}\right]\cup(0;+\infty)$.

7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Две окружности Ω_1 и Ω_2 равных радиусов с центрами O_1 и O_2 вписаны в углы BAD и BCD соответственно, при этом первая касается стороны AB в точке L, а вторая касается стороны BC в точке F.

а) Найдите радиус окружности Ω_2, если $AL=\sqrt{2}$, $CF=2\sqrt{2}$.

б) Пусть дополнительно известно, что точка O_2 является центром окружности, описанной около треугольника BOC. Найдите угол BDC.

Ответ. а) $r=2$, б) $\angle BDC=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$.

Решение. а) Отрезки AO_1 и CO_2 являются биссектрисами углов BAD и BCD (центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла). Так как четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, сумма его противоположных углов BAD и BCD равна 180°, поэтому сумма их половин – углов LAO_1 и FCO_2 – равна 90°. Пусть $\angle O_1AL=\alpha$. Тогда $\angle FO_2C=90^\circ-\angle FCO_2=\alpha$. Выражая двумя способами $\operatorname{tg}\alpha$, получаем: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{O_1L}{AL}=\frac{CF}{O_2F}$, $\frac{r}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{r}$, $r=2$.

б) $O_2B=O_2C$ как радиусы окружности, описанной около треугольника BOC, поэтому высота этого треугольника O_2F также является его медианой. Точки O, O_2 и F лежат на одной прямой (на серединном перпендикуляре к отрезку BC). Далее находим: $O_2C=\sqrt{O_2F^2+CF^2}=2\sqrt{3}$, $O_2O=O_2C=2\sqrt{3}$ (как радиусы одной окружности).

Возможны два случая: точки O_2 и O могут лежать либо по одну сторону от прямой BC, либо по разные стороны от неё.

В первом случае получаем: $\angle BDC=\frac{1}{2}\angle BOC=\angle COF=\operatorname{arctg}\frac{CF}{OF}=\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{2}}{2+2\sqrt{3}}=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$.

Рассмотрим второй случай. Точка O_2 лежит на биссектрисе угла BCD, поэтому

$$\angle BCD=2\angle O_2CF=2\operatorname{arctg}\frac{O_2F}{CF}=2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}=\operatorname{arctg}\left(2\sqrt{2}\right).$$

Это означает, что вписанный угол BCD опирается на дугу BD, равную $2\operatorname{arctg}\left(2\sqrt{2}\right)$. Вместе с тем дуга BC равна углу BOC, а $\angle BOC=2\angle COF=2\operatorname{arctg}\frac{CF}{OF}=2\operatorname{arctg}\frac{CF}{O_2O-r}=2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}=2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$, что невозможно, так как в этом случае дуга BD должна быть меньше дуги BC.

1. Решите уравнение $\dfrac{|\sin x|+\sin 3x}{\cos x\cos 2x}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Ответ. $x=\dfrac{\pi}{12}+2k\pi$, $x=\dfrac{7\pi}{12}+2k\pi$, $x=-\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$.

Решение. Возможны два случая.

а) $\sin x\ge 0$. Тогда $\dfrac{\sin x+\sin 3x}{\cos x\cos 2x}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\dfrac{2\cos x\sin 2x}{\cos x\cos 2x}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow \operatorname{tg}2x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{2}, k\in Z$. Учитывая условие, получаем $x=\dfrac{\pi}{12}+2k\pi, k\in Z$ и $x=\dfrac{7\pi}{12}+2k\pi, k\in Z$.

б) $\sin x<0$. Тогда $\dfrac{-\sin x+\sin 3x}{\cos x\cos 2x}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\dfrac{2\cos 2x\sin x}{\cos x\cos 2x}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow \operatorname{tg}x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi, k\in Z$. Синус отрицателен при $x=-\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$.

2. Решите уравнение $\left(\dfrac{x}{4}\right)^{\log_5(50x)}=x^6$.

Ответ. $x=\dfrac{1}{2}$, $x=2500$.

Решение. Логарифмируя по основанию 5, получаем уравнение, равносильное исходному:

$$\log_5(50x)\cdot\log_5\left(\frac{x}{4}\right)=\log_5\left(x^6\right)\Leftrightarrow(\log_5 x+2+\log_5 2)(\log_5 x-2\log_5 2)=6\log_5 x.$$

Обозначим $\log_5 x=y$, $\log_5 2=a$. После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых уравнение принимает вид $y^2-(a+4)y-2a^2-4a=0$. Решаем квадратное уравнение относительно y:

$$D=(a+4)^2+4\left(2a^2+4a\right)=9a^2+24a+16=(3a+4)^2,\ y=\frac{4+a\pm(3a+4)}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=2a+4,\\ y=-a.\end{array}\right.$$

Находим x: если $y=-a$, то $\log_5 x=-\log_5 2$ и $x=\dfrac{1}{2}$; если $y=2a+4$, то $\log_5 x=2\log_5 2+4$ и $x=2500$.

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих $267\,000$ и таких, что k^2-1 делится нацело на 267.

Ответ. 4000.

Решение. Разложив делимое и делитель на множители, получаем условие $(k-1)(k+1)\vdots(3\cdot 89)$. Значит, одно из чисел $(k+1)$ или $(k-1)$ делится на 89. Рассмотрим два случая.

а) $(k+1)\vdots 89$, т.е. $k=89p+88, p\in Z$. Тогда получаем $(89p+87)(89p+89)\vdots(3\cdot 89)\Leftrightarrow(89p+87)(p+1)\vdots 3$. Первый множитель делится на 3 при $p=3q, q\in Z$, а второй – при $p=3q+2, q\in Z$, откуда получаем, что $k=267q+88$, $k=267q+266$, $q\in Z$.

б) $(k-1)\vdots 89$, т.е. $k=89p+1, p\in Z$. Тогда получаем $89p(89p+2)\vdots(3\cdot 89)\Leftrightarrow(89p+2)p\vdots 3$. Первый множитель делится на 3 при $p=3q+2, q\in Z$, а второй – при $p=3q, q\in Z$, откуда получаем, что $k=267q+179$, $k=267q+1$, $q\in Z$.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа, дающие остатки $88, 266, 179, 1$ при делении на 267, то есть подходят каждые 4 из 267 подряд идущих чисел. Так как $267\,000=267\cdot 1000$, получаем $4\cdot 1000=4000$ чисел.

4. Решите систему $\begin{cases}x^2+y^2\le 1,\\ x^4-18x^2y^2+81y^4-20x^2-180y^2+100=0.\end{cases}$

Ответ. $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}};\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}};-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}};\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}};-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

Решение. Преобразуем уравнение системы:

$x^4-18x^2y^2+81y^4-20x^2-180y^2+100=0 \Leftrightarrow x^4+18x^2y^2+81y^4-20x^2-180y^2+100=36x^2y^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+9y^2\right)^2-20\left(x^2+9y^2\right)+100=36x^2y^2 \Leftrightarrow \left(x^2+9y^2-10\right)^2=(6xy)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+9y^2-10=6xy, \\ x^2+9y^2-10=-6xy \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-3y)^2=10, \\ (x+3y)^2=10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3y=\pm\sqrt{10}, \\ x+3y=\pm\sqrt{10}. \end{array}\right.$$

В каждом из четырёх случаев выражаем x и подставляем в неравенство.

Если $x=3y+\sqrt{10}$, то $y^2+\left(3y+\sqrt{10}\right)^2\le 1$, $10y^2+6y\sqrt{10}+9\le 0$, $\left(y\sqrt{10}+3\right)^2\le 0$, $y=-\frac{3}{\sqrt{10}}$. Тогда $x=\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Остальные случаи разбираются аналогично. В итоге получаем 4 решения: $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}};-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{10}};-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

5. На ребре BB_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка T такая, что $BT:B_1T=2:3$. Точка T является вершиной прямого кругового конуса такого, что три вершины призмы принадлежат окружности его основания.

а) Найдите отношение высоты призмы к ребру её основания.

б) Пусть дополнительно известно, что $CC_1=5$. Найдите объём конуса.

Ответ. а) $\sqrt{5}$; б) $V=\frac{180\pi\sqrt{3}}{23\sqrt{23}}$.

Решение. Если три вершины призмы лежат на окружности основания конуса, то это означает, что три вершины призмы равноудалены от точки T, т.е. три из отрезков TA, TB, TC, TA_1, TB_1, TC_1 равны между собой. Заметим, что $TA_1=TC_1>TA=TC$; кроме того $TA>TB$, $TA_1>TB_1$. Из этих неравенств следует, что отрезки TA_1 и TC_1 самые длинные, а отрезок TB – самый короткий. Значит, равны между собой отрезки TA, TC и TB_1.

а) Обозначим $TB_1=3x$, $TB=2x$. Тогда $TA=3x$. По теореме Пифагора для треугольника ABT находим, что $AB=x\sqrt{5}$. Значит, искомое отношение равно $\frac{5x}{x\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.

б) Из треугольника BB_1A по теореме Пифагора получаем, что $AB_1=x\sqrt{30}$. Радиус основания конуса – это радиус окружности, описанной около треугольника AB_1C. Его стороны: $AB_1=CB_1=x\sqrt{30}$, $AC=x\sqrt{5}$. Тогда находим его высоту: $B_1H=\frac{x\sqrt{115}}{2}$, площадь: $S=\frac{1}{2}\cdot x\sqrt{5}\cdot\frac{x\sqrt{115}}{2}=\frac{5x^2\sqrt{23}}{4}$, радиус описанной окружности: $R=\frac{x\sqrt{30}\cdot x\sqrt{30}\cdot x\sqrt{5}}{4S}=\frac{6x\sqrt{5}}{\sqrt{23}}$.

Образующая конуса – это отрезок AT, т.е. она равна $3x$. Тогда высота конуса $h=\sqrt{9x^2-\frac{180x^2}{23}}=\frac{3x\sqrt{3}}{\sqrt{23}}$.

Находим объём конуса: $V=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{180x^2}{23}\cdot\frac{3x\sqrt{3}}{\sqrt{23}}=\frac{180\pi x^3\sqrt{3}}{23\sqrt{23}}$. Так как $x=1$, окончательно получаем $V=\frac{180\pi\sqrt{3}}{23\sqrt{23}}$.

6. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся число b такое, что система

$$\begin{cases} x=\frac{6}{a}-|y-a|, \\ x^2+y^2+b^2+63=2(by-8x) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

Ответ. $a\in\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup(0+\infty)$.

Решение. Второе уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x+8)^2+(y-b)^2=1^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 1 с центром $(-8;b)$. При всевозможных $b\in\mathrm{R}$ эти окружности заметают полосу $-9\le x\le -7$.

Первое уравнение задаёт “уголок” с ветвями, направленными влево, с вершиной в точке $\left(\frac{6}{a};a\right)$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы “уголок”, задаваемый первым уравнением, имел хотя бы одну общую точку с полосой $-9\le x\le -7$, а для этого нужно, чтобы абсцисса его вершины удовлетворяла неравенству $x_{\text{в}}\ge -9$, т.е $\frac{6}{a}\ge -9$ откуда $a\in\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup(0+\infty)$.

7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Две окружности Ω_1 и Ω_2 равных радиусов с центрами O_1 и O_2 вписаны в углы ABC и ADC соответственно, при этом первая касается стороны BC в точке F, а вторая касается стороны AD в точке P.

а) Найдите радиус окружности Ω_2, если $BF=3\sqrt{2}$, $DP=\sqrt{2}$.

б) Пусть дополнительно известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника BOC. Найдите угол BDC.

Ответ. а) $r=\sqrt{6}$, б) $\angle BDC=30^\circ$.

Решение. а) Отрезки BO_1 и DO_2 являются биссектрисами углов ABC и ADC (центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла). Так как четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, сумма его противоположных углов ABC и ADC равна 180°, поэтому сумма их половин – углов FBO_1 и PDO_2 – равна 90°. Пусть $\angle O_1BF=\alpha$. Тогда $\angle PO_2D=90^\circ-\angle PDO_2=\alpha$. Выражая двумя способами $\operatorname{tg}\alpha$, получаем: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{O_1F}{BF}=\frac{DP}{O_2P}$, $\frac{r}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{r}$, $r=\sqrt{6}$.

б) $O_1B=O_1C$ как радиусы окружности, описанной около треугольника BOC, поэтому высота O_1F этого треугольника также является его медианой. Точки O, O_1 и F лежат на одной прямой (на серединном перпендикуляре к отрезку BC). Далее находим: $O_1B=\sqrt{O_1F^2+FB^2}=2\sqrt{6}$, $O_1O=O_1B=2\sqrt{6}$ (как радиусы одной окружности).

Возможны два случая: точки O_1 и O могут лежать либо по одну сторону от прямой BC, либо по разные стороны от неё.

В первом случае получаем: $\angle BDC=\frac{1}{2}\angle BOC=\angle BOF=\operatorname{arctg}\frac{BF}{FO}=\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{6}}=30^\circ$.

Рассмотрим второй случай. Точка O_1 лежит на биссектрисе угла ABC, поэтому

$$\angle ABC=2\angle O_1BF=2\operatorname{arctg}\frac{O_1F}{BF}=2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=60^\circ.$$

Это означает, что вписанный угол ABC опирается на дугу AC, равную 120°. Вместе с тем дуга BC равна углу BOC, а $\angle BOC=2\angle BOF=2\operatorname{arctg}\frac{BF}{OF}=2\operatorname{arctg}\frac{BF}{O_1O-r}=2\operatorname{arctg}\sqrt{3}=120^\circ$, что невозможно, так как в этом случае дуга AC должна быть меньше дуги BC.

1. Решите неравенство $\dfrac{\log_3(x^4)\cdot\log_{\frac{1}{3}}(x^2)+\log_3(x^2)-\log_{\frac{1}{3}}(x^4)+2}{\left(\log_{\frac{1}{3}}(x^2)\right)^3+64}\le 0$.

Ответ. $x\in(-9;-3]\cup\left[-\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}};0\right)\cup\left(0;\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\right]\cup[3;9)$.

Решение. Данное неравенство равносильно следующему:

$$\frac{2\log_3 x^2\cdot\left(-\log_3 x^2\right)+\log_3 x^2+2\log_3 x^2+2}{64-\log_3^3 x^2}\le 0.$$

После замены $\log_3 x^2=t$ неравенство принимает вид $\dfrac{-2t^2+3t+2}{64-t^3}\le 0$, откуда $\dfrac{(2-t)(1+2t)}{4-t}\le 0$,

$t\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]\cup[2;4)$.

Находим значения x.

При $t\le-\dfrac{1}{2}$ получаем $0<x^2\le\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow x\in\left[-\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}};0\right)\cup\left(0;\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}\right]$.

При $2\le t<4$ получаем $9\le x^2<81\Leftrightarrow x\in(-9;-3]\cup[3;9)$.

2. Решите уравнение $\left(\dfrac{7}{2}\cos 2x+2\right)\cdot|2\cos 2x-1|=\cos x(\cos x+\cos 5x)$.

Ответ. $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2},k\in Z$.

Решение. Преобразуем правую часть уравнения:

$$\cos x(\cos x+\cos 5x)=\cos x\cdot 2\cos 3x\cos 2x=\cos 2x\cdot(2\cos x\cos 3x)=\cos 2x\cdot(\cos 2x+\cos 4x)=$$
$$=\cos 2x\left(2\cos^2 2x+\cos 2x-1\right)=\cos 2x(2\cos 2x-1)(\cos 2x+1).$$

Обозначим $\cos 2x=t$. Тогда уравнение принимает вид $\left(\dfrac{7}{2}t+2\right)\cdot|2t-1|=t(2t-1)(t+1)$. Возможны три случая.

а) $t=\dfrac{1}{2}$ является корнем уравнения.

б) $t>\dfrac{1}{2}$. Получаем $\dfrac{7}{2}t+2=t^2+t$, $t^2-\dfrac{5}{2}t-2=0$, $t=\dfrac{5\pm\sqrt{57}}{4}$. Корень $t_1=\dfrac{5+\sqrt{57}}{4}$ не подходит, так как $t_1>1$; корень $t_2=\dfrac{5-\sqrt{57}}{4}$ не подходит, так как не удовлетворяет условию $t>\dfrac{1}{2}$.

в) $t<\dfrac{1}{2}$. Получаем $\dfrac{7}{2}t+2=-t^2-t$, $t^2+\dfrac{9}{2}t+2=0$, $t=4$ или $t=-\dfrac{1}{2}$. Подходит $t=-\dfrac{1}{2}$.

Итого: $t=\pm\dfrac{1}{2}$, $\cos 2x=\pm\dfrac{1}{2}$, $2x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi$, $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2},k\in Z$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=-\dfrac{2}{15},\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}=-\dfrac{2}{3},\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=-\dfrac{1}{4}.\end{cases}$

Ответ. $(5;-1;-2)$.

Решение. Домножая обе части первого уравнения на $-\dfrac{15}{2}x(y+z)$, обе части второго – на $-\dfrac{3}{2}y(x+z)$, третьего – на $-4z(x+y)$, получаем систему

$$\begin{cases} -7{,}5(x+y+z)=xy+xz, \\ -1{,}5(x+y+z)=xy+yz, \\ -4(x+y+z)=xz+yz. \end{cases}$$

Сложив почленно все три уравнения и разделив полученное равенство пополам, получаем равенство

$$xy+xz+yz=-6{,}5(x+y+z).$$

Вычитая из него каждое из уравнений последней системы, находим, что

$$\begin{cases} -2{,}5(x+y+z)=xy, \\ (x+y+z)=yz, \\ -5(x+y+z)=xz. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе (это возможно, так как из ОДЗ исходной системы следует, что $xyz \neq 0$), получаем, что $x=-2{,}5z$, а разделив первое на третье – что $y=0{,}5z$.

Тогда второе уравнение принимает вид $-z=0{,}5z^2$, откуда $z=-2$, $x=5$, $y=-1$.

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM:MC=2:5$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка F такая, что $MF:FC=1:4$. Пусть дополнительно известно, что прямые LF и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

Ответ. а) $9:40$, б) $\arccos\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.

Решение. а) В треугольнике ABM отрезок BP является биссектрисой и высотой, поэтому треугольник ABM равнобедренный, а BP является также его медианой. Обозначим $BM=2x$, тогда $AB=2x$, $MC=5x$. По свойству биссектрисы треугольника, $AL:LC=AB:BC=2x:7x=2:7$.

Обозначим площадь треугольника ABC через S. Тогда $S_{ABP}=\dfrac{1}{2}S_{ABM}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{7}S_{ABC}=\dfrac{1}{7}S$. По теореме об отношении площадей треугольников получаем $\dfrac{S_{APL}}{S_{AMC}}=\dfrac{AP}{AM}\cdot\dfrac{AL}{AC}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{9}=\dfrac{1}{9}$, следовательно, $S_{APL}=\dfrac{1}{9}S_{AMC}=\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{5}{7}S$, $S_{LPMC}=\dfrac{8}{9}S_{AMC}=\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{5}{7}S=\dfrac{40}{63}S$. Искомое отношение равно $\dfrac{1}{7}S:\dfrac{40}{63}S=\dfrac{9}{40}$.

б) Так как у треугольников ABP и ALP общая высота, проведённая из вершины A, то $BP:PL=S_{ABP}:S_{ALP}=\dfrac{1}{7}:\dfrac{5}{9\cdot 7}=9:5$. Пусть $BP=9y$, $PL=5y$.

Пусть $\angle CBL=\gamma$. Тогда из треугольника BPM получаем, что $\cos\gamma=\dfrac{9y}{2x}$, а из треугольника BFL – что $\cos\gamma=\dfrac{3x}{14y}$. Приравнивая эти выражения для косинуса, находим, что $x=y\sqrt{21}$, откуда $\cos\gamma=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.

5. Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих условию $5x^2-6xy+y^2=6^{100}$.

Ответ. 19594.

Решение. Раскладывая левую и правую части уравнения на множители, получаем $(5x-y)(x-y)=2^{100}\cdot 3^{100}$. Поскольку каждый из множителей в левой части является целым числом, отсюда следует, что

$$\begin{cases} 5x-y=2^k\cdot 3^l, \\ x-y=2^{100-k}\cdot 3^{100-l} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 5x-y=-2^k\cdot 3^l, \\ x-y=-2^{100-k}\cdot 3^{100-l}, \end{cases}$$

где k и l – целые числа из отрезка $[0;100]$.

Найдём количество решений первой системы. Выражая из неё x и y, получаем

$$\begin{cases} x=2^{k-2}\cdot 3^l-2^{98-k}\cdot 3^{100-l}, \\ y=2^{k-2}\cdot 3^l-5\cdot 2^{98-k}\cdot 3^{100-l}. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение. Показатели в степенях тройки неотрицательны. Сумма показателей в степенях двойки равна 96, поэтому хотя бы один из них положителен, т.е соответствующий ему член является целым числом. Так как в левой части равенства также целое число, то и второй член в правой части равенства должен быть целым. Значит, для существования целочисленных решений необходимо и достаточно, чтобы $2 \le k \le 98$, $0 \le l \le 100$ – всего $97 \cdot 101 = 9797$ вариантов.

Вторая система также имеет 9797 решений; итак, всего 19594 решений.

6. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся число b такое, что система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2a(a + y - x) = 49, \\ y = 15\cos(x - b) - 8\sin(x - b) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

Ответ. $a \in [-24; 24]$.

Решение. Первое уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x - a)^2 + (y + a)^2 = 7^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 7 с центром $(a; -a)$.

С помощью введения вспомогательного угла второе уравнение системы может быть приведено к виду $y = 17\cos(x - b - \theta)$. При всевозможных $b \in \mathrm{R}$ графики этих функций заметают полосу $-17 \le y \le 17$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы окружность, задаваемая первым уравнением, имела хотя бы одну общую точку с данной полосой, откуда $a \in [-24; 24]$.

7. В основании четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$, в котором $AC = 4$ и $\angle DBC = 30^\circ$. Сфера проходит через вершины D, A, B, B_1, C_1, D_1.

а) Найдите площадь круга, полученного в сечении сферы плоскостью, проходящей через точки B, C и D.

б) Найдите угол A_1CD.

в) Пусть дополнительно известно, что радиус сферы равен 5. Найдите объём призмы.

Ответ. а) 16π, б) 90°, в) $48\sqrt{3}$.

Решение. а) Так как диагонали ромба являются биссектрисами его углов, получаем, что острый угол ромба равен 60°. В сечении шара плоскостью BCD получаем круг, описанный около треугольника ABD. Центром этого круга является точка C, а его радиус равен стороне ромба, то есть 4. Значит, площадь равна 16π.

б) Пусть O – центр шара. Опустим из точки O перпендикуляр OH на плоскость $ABCD$. Тогда треугольники OHA, OHB и OHD равны по катету и гипотенузе (OH – общая, $OA = OB = OD$ как радиусы сферы). Значит, $HA = HB = HD$, поэтому H – центр окружности, описанной около треугольника ABD, т.е. точка H совпадает с точкой C.

Таким образом, отрезок OC перпендикулярен плоскости основания $ABCD$. Аналогично доказывается, что отрезок OA_1 перпендикулярен плоскости $A_1B_1C_1D_1$. Итак, диагональ A_1C является высотой призмы, а центр сферы O – это её середина. Поэтому $\angle A_1CD = 90^\circ$.

в) В прямоугольном треугольнике AOC известны гипотенуза $AO = 5$ и катет $AC = 4$. Значит, $CO = 3$, $A_1C = 6$;

$V = A_1C \cdot S_{ABCD} = 6 \cdot 8\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$.

1. Решите неравенство $\dfrac{125+\left(\log_{\frac{1}{2}}\left(x^4\right)\right)^3}{\log_2\left(x^4\right)\cdot\log_2\left(x^2\right)+6\log_{\frac{1}{2}}\left(x^4\right)+17\log_2\left(x^2\right)-3}\geq 0$.

Ответ. $x\in\left[-2\sqrt[4]{2};-\sqrt[4]{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{2}};0\right)\cup\left(0;\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)\cup\left(\sqrt[4]{2};2\sqrt[4]{2}\right]$.

Решение. Данное неравенство равносильно следующему:

$$\frac{125-\left(2\log_2\left(x^2\right)\right)^3}{2\log_2\left(x^2\right)\cdot\log_2\left(x^2\right)-12\log_2\left(x^2\right)+17\log_5\left(x^2\right)-3}\geq 0.$$

После замены $\log_2 x^2=t$ неравенство принимает вид $\dfrac{125-(2t)^3}{2t^2+5t-3}\geq 0$, откуда $\dfrac{2t-5}{(t+3)(2t-1)}\leq 0$,

$t\in(-\infty;-3)\cup\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right]$.

Находим значения x.

При $t<-3$ получаем $0<x^2<\dfrac{1}{8}\Leftrightarrow x\in\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{2}};0\right)\cup\left(0;\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.

При $\dfrac{1}{2}<t\leq\dfrac{5}{2}$ получаем $\sqrt{2}<x^2\leq\sqrt{32}\Leftrightarrow x\in\left[-2\sqrt[4]{2};-\sqrt[4]{2}\right)\cup\left(\sqrt[4]{2};2\sqrt[4]{2}\right]$.

2. Решите уравнение $\left(\dfrac{7}{4}-2\cos 2x\right)\cdot\left|2\cos 2x+1\right|=\cos x(\cos x-\cos 5x)$.

Ответ. $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathrm{Z}$.

Решение. Преобразуем правую часть уравнения:

$$\cos x(\cos x-\cos 5x)=\cos x\cdot(2\sin 2x\sin 3x)=\sin 2x\cdot(2\sin 3x\cos x)=\sin 2x\cdot(\sin 4x+\sin 2x)=$$
$$=\sin 2x(2\sin 2x\cos 2x+\sin 2x)=\sin^2 2x(1+2\cos 2x)=\left(1-\cos^2 2x\right)(1+2\cos 2x).$$

Обозначим $\cos 2x=t$. Тогда уравнение принимает вид $\left(\dfrac{7}{4}-2t\right)\cdot|1+2t|=(1+2t)\left(1-t^2\right)$. Возможны три случая.

а) $t=-\dfrac{1}{2}$ является корнем уравнения.

б) $t>-\dfrac{1}{2}$. Получаем $\dfrac{7}{4}-2t=1-t^2$, $t^2-2t+\dfrac{3}{4}=0$, $t=\dfrac{1}{2}$ или $t=\dfrac{3}{2}$. Подходит $t=\dfrac{1}{2}$.

в) $t<-\dfrac{1}{2}$. Получаем $\dfrac{7}{4}-2t=t^2-1$, $t^2+2t-\dfrac{11}{4}=0$, $t=\dfrac{-2\pm\sqrt{15}}{2}$. Корень $t_1=\dfrac{-2-\sqrt{15}}{2}$ не подходит, так как $t_1<-1$; корень $t_2=\dfrac{-2+\sqrt{15}}{2}$ не подходит, так как не удовлетворяет условию $t<-\dfrac{1}{2}$.

Итого: $t=\pm\dfrac{1}{2}$, $\cos 2x=\pm\dfrac{1}{2}$, $2x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi$, $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathrm{Z}$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{1}{12},\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{1}{6},\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

Ответ. $(-4;2;1)$.

Решение. Домножая обе части первого уравнения на $12x(y+z)$, обе части второго – на $6y(x+z)$, третьего – на $2z(x+y)$, получаем систему

$$\begin{cases} 12(x+y+z)=xy+xz, \\ 6(x+y+z)=xy+yz, \\ 2(x+y+z)=xz+yz. \end{cases}$$

Сложив почленно все три уравнения и разделив полученное равенство пополам, получаем равенство

$$xy+xz+yz=10(x+y+z).$$

Вычитая из него каждое из уравнений последней системы, находим, что

$$\begin{cases} 8(x+y+z)=xy, \\ -2(x+y+z)=yz, \\ 4(x+y+z)=xz. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе (это возможно, так как из ОДЗ исходной системы следует, что $xyz \neq 0$), получаем, что $x=-4z$, а разделив первое на третье – что $y=2z$.

Тогда второе уравнение принимает вид $2z=2z^2$, откуда $z=1$, $x=-4$, $y=2$.

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM:MC=2:7$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка T такая, что $MT:TC=1:6$. Пусть дополнительно известно, что прямые LT и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

Ответ. а) $11:70$, б) $\arccos\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$.

Решение. а) В треугольнике ABM отрезок BP является биссектрисой и высотой, поэтому треугольник ABM равнобедренный, а BP является также его медианой. Обозначим $BM=2x$, тогда $AB=2x$, $MC=7x$. По свойству биссектрисы треугольника, $AL:LC=AB:BC=2x:9x=2:9$.

Обозначим площадь треугольника ABC через S. Тогда $S_{ABP}=\frac{1}{2}S_{ABM}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}S_{ABC}=\frac{1}{9}S$. По теореме об отношении площадей треугольников получаем $\frac{S_{APL}}{S_{AMC}}=\frac{AP}{AM}\cdot\frac{AL}{AC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{11}=\frac{1}{11}$, следовательно, $S_{APL}=\frac{1}{11}S_{AMC}=\frac{1}{11}\cdot\frac{7}{9}S$, $S_{LPMC}=\frac{10}{11}S_{AMC}=\frac{10}{11}\cdot\frac{7}{9}S=\frac{70}{99}S$. Искомое отношение равно $\frac{1}{9}S:\frac{70}{99}S=\frac{11}{70}$.

б) Так как у треугольников ABP и ALP общая высота, проведённая из вершины A, то $BP:PL=S_{ABP}:S_{ALP}=\frac{1}{9}:\frac{7}{9\cdot 11}=11:7$. Пусть $BP=11y$, $PL=7y$.

Пусть $\angle CBL=\gamma$. Тогда из треугольника BPM получаем, что $\cos\gamma=\frac{11y}{2x}$, а из треугольника BFL – что $\cos\gamma=\frac{3x}{18y}$. Приравнивая эти выражения для косинуса, находим, что $x=y\sqrt{33}$, откуда $\cos\gamma=\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$.

5. Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих условию $6x^2-7xy+y^2=10^{100}$.

Ответ. 19998.

Решение. Раскладывая левую и правую части уравнения на множители, получаем $(6x-y)(x-y)=2^{100}\cdot 5^{100}$. Поскольку каждый из множителей в левой части является целым числом, отсюда следует, что

$$\begin{cases} 6x-y=2^k\cdot 5^l, \\ x-y=2^{100-k}\cdot 5^{100-l} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 6x-y=-2^k\cdot 5^l, \\ x-y=-2^{100-k}\cdot 5^{100-l}, \end{cases}$$

где k и l – целые числа из отрезка $[0;100]$.

Найдём количество решений первой системы. Выражая из неё x и y, получаем

$$\begin{cases} x=2^k\cdot 5^{l-1}-2^{100-k}\cdot 5^{99-l}, \\ y=2^k\cdot 5^{l-1}-6\cdot 2^{100-k}\cdot 5^{99-l}. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение. Показатели в степенях двойки неотрицательны. Сумма показателей в степенях пятёрки равна 98, поэтому хотя бы один из них положителен, т.е соответствующий ему член является целым числом. Так как в левой части равенства также целое число, то и второй член в правой части равенства должен быть целым. Значит, для существования целочисленных решений необходимо и достаточно, чтобы $0 \le k \le 100$, $1 \le l \le 99$ – всего $99 \cdot 101 = 9999$ вариантов.

Вторая система также имеет 9999 решений; итак, всего 19998 решений.

6. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2b(b - x + y) = 4, \\ y = 5\cos(x - a) - 12\sin(x - a) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

Ответ. $b \in [-15; 15]$.

Решение. Первое уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x-b)^2 + (y+b)^2 = 2^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 9 с центром $(-b; -b)$.

С помощью введения вспомогательного угла второе уравнение системы может быть приведено к виду $y = 13\cos(x - a - \theta)$. При всевозможных $a \in \mathrm{R}$ графики этих функций заметают полосу $-13 \le y \le 13$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы окружность, задаваемая первым уравнением, имела хотя бы одну общую точку с данной полосой, откуда $b \in [-15; 15]$.

7. В основании четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$, в котором $CD = 3$ и $\angle ABD = 30^\circ$. Сфера проходит через вершины D, C, B, B_1, A_1, D_1.

а) Найдите площадь круга, полученного в сечении сферы плоскостью, проходящей через точки A, C и D.

б) Найдите угол C_1AB.

в) Пусть дополнительно известно, что радиус сферы равен 6. Найдите объём призмы.

Ответ. а) 9π, б) 90°, в) 81.

Решение. а) Так как диагонали ромба являются биссектрисами его углов, получаем, что острый угол ромба равен 60°. В сечении шара плоскостью ACD получаем круг, описанный около треугольника BCD. Центром этого круга является точка A, а его радиус равен стороне ромба, то есть 3. Значит, площадь равна 9π.

б) Пусть O – центр шара. Опустим из точки O перпендикуляр OH на плоскость $ABCD$. Тогда треугольники OHC, OHB и OHD равны по катету и гипотенузе (OH – общая, $OC = OB = OD$ как радиусы сферы). Значит, $HC = HB = HD$, поэтому H – центр окружности, описанной около треугольника CBD, т.е. точка H совпадает с точкой C.

Таким образом, отрезок OA перпендикулярен плоскости основания $ABCD$. Аналогично доказывается, что отрезок OC_1 перпендикулярен плоскости $A_1B_1C_1D_1$. Итак, диагональ AC_1 является высотой призмы, а центр сферы O – это её середина. Поэтому $\angle C_1AB = 90^\circ$.

в) В прямоугольном треугольнике AOC известны гипотенуза $CO = 6$ и катет $AC = 3$. Значит, $AO = 3\sqrt{3}$, $C_1A = 6\sqrt{3}$; $V = AC_1 \cdot S_{ABCD} = 6\sqrt{3} \cdot \dfrac{9\sqrt{3}}{2} = 81$.

1. Решите неравенство $\dfrac{\log_2\left(x^6\right)\cdot\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2\right)-\log_{\frac{1}{2}}\left(x^6\right)-8\log_2\left(x^2\right)+2}{8+\left(\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2\right)\right)^3}\le 0$.

Ответ. $x\in\left(-2;-\sqrt[6]{2}\right]\cup\left[-\dfrac{1}{2};0\right)\cup\left(0;\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\sqrt[6]{2};2\right)$.

Решение. Данное неравенство равносильно следующему:

$$\frac{3\log_2 x^2\cdot\left(-\log_2 x^2\right)+3\log_2 x^2-8\log_2 x^2+2}{8-\log_2^3 x^2}\le 0.$$

После замены $\log_2 x^2=t$ неравенство принимает вид $\dfrac{-3t^2-5t+2}{8-t^3}\le 0$, откуда $\dfrac{(2+t)(1-3t)}{2-t}\le 0$,

$t\in(-\infty;-2]\cup\left[\dfrac{1}{3};2\right)$.

Находим значения x.

При $t\le -2$ получаем $0<x^2\le\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow x\in\left[-\dfrac{1}{2};0\right)\cup\left(0;\dfrac{1}{2}\right]$.

При $\dfrac{1}{3}\le t<2$ получаем $\sqrt[3]{2}\le x^2<4\Leftrightarrow x\in\left(-2;-\sqrt[6]{2}\right]\cup\left[\sqrt[6]{2};2\right)$.

2. Решите уравнение $\left(3\cos 2x+\dfrac{9}{4}\right)\cdot\left|1-2\cos 2x\right|=\sin x(\sin x-\sin 5x)$.

Ответ. $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2},k\in Z$.

Решение. Преобразуем правую часть уравнения:

$$\sin x(\sin x-\sin 5x)=\sin x\cdot(-2\sin 2x\cos 3x)=-\sin 2x\cdot(2\sin x\cos 3x)=-\sin 2x\cdot(\sin 4x-\sin 2x)=$$
$$=-\sin 2x(2\sin 2x\cos 2x-\sin 2x)=\sin^2 2x(1-2\cos 2x)=\left(1-\cos^2 2x\right)(1-2\cos 2x).$$

Обозначим $\cos 2x=t$. Тогда уравнение принимает вид $\left(\dfrac{9}{4}+3t\right)\cdot|1-2t|=(1-2t)\left(1-t^2\right)$. Возможны три случая.

а) $t=\dfrac{1}{2}$ является корнем уравнения.

б) $t<\dfrac{1}{2}$. Получаем $\dfrac{9}{4}+3t=1-t^2$, $t^2+3t+\dfrac{5}{4}=0$, $t=-\dfrac{1}{2}$ или $t=-\dfrac{5}{2}$. Подходит $t=-\dfrac{1}{2}$.

в) $t>\dfrac{1}{2}$. Получаем $\dfrac{9}{4}+3t=t^2-1$, $t^2-3t-\dfrac{13}{4}=0$, $t=\dfrac{3\pm\sqrt{22}}{2}$. Корень $t_1=\dfrac{3+\sqrt{22}}{2}$ не подходит, так как $t_1>1$; корень $t_2=\dfrac{3-\sqrt{22}}{2}$ не подходит, так как не удовлетворяет условию $t>\dfrac{1}{2}$.

Итого: $t=\pm\dfrac{1}{2}$, $\cos 2x=\pm\dfrac{1}{2}$, $2x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi$, $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2},k\in Z$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=1,\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{4}{3},\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=-\dfrac{4}{5}.\end{cases}$

Ответ. $(2;3;-1)$.

Решение. Домножая обе части первого уравнения на $x(y+z)$, обе части второго – на $\dfrac{3}{4}y(x+z)$, третьего – на $-\dfrac{5}{4}z(x+y)$, получаем систему

$$\begin{cases} (x+y+z)=xy+xz, \\ \frac{3}{4}(x+y+z)=xy+yz, \\ -\frac{5}{4}(x+y+z)=xz+yz. \end{cases}$$

Сложив почленно все три уравнения и разделив полученное равенство пополам, получаем равенство

$$xy+xz+yz=\frac{1}{4}(x+y+z).$$

Вычитая из него каждое из уравнений последней системы, находим, что

$$\begin{cases} \frac{3}{2}(x+y+z)=xy, \\ -\frac{3}{4}(x+y+z)=yz, \\ -\frac{1}{2}(x+y+z)=xz. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе (это возможно, так как из ОДЗ исходной системы следует, что $xyz \neq 0$), получаем, что $x=-2z$, а разделив первое на третье – что $y=-3z$.

Тогда второе уравнение принимает вид $3z=-3z^2$, откуда $z=-1$, $x=2$, $y=3$.

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM:MC=3:8$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка F такая, что $MF:FC=1:7$. Пусть дополнительно известно, что прямые LF и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

Ответ. а) $21:100$, б) $\arccos\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{33}}$.

Решение. а) В треугольнике ABM отрезок BP является биссектрисой и высотой, поэтому треугольник ABM равнобедренный, а BP является также его медианой. Обозначим $BM=3x$, тогда $AB=3x$, $MC=8x$. По свойству биссектрисы треугольника, $AL:LC=AB:BC=3x:11x=3:11$.

Обозначим площадь треугольника ABC через S. Тогда $S_{ABP}=\frac{1}{2}S_{ABM}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{11}S_{ABC}=\frac{3}{22}S$. По теореме об отношении площадей треугольников получаем $\frac{S_{APL}}{S_{AMC}}=\frac{AP}{AM}\cdot\frac{AL}{AC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{14}=\frac{3}{28}$, следовательно, $S_{APL}=\frac{3}{28}S_{AMC}=\frac{3}{28}\cdot\frac{8}{11}S$, $S_{LPMC}=\frac{25}{28}S_{AMC}=\frac{25}{28}\cdot\frac{8}{11}S=\frac{50}{77}S$. Искомое отношение равно $\frac{3}{22}S:\frac{50}{77}S=\frac{21}{100}$.

б) Так как у треугольников ABP и ALP общая высота, проведённая из вершины A, то $BP:PL=S_{ABP}:S_{ALP}=\frac{3}{22}:\frac{6}{77}=7:4$. Пусть $BP=7y$, $PL=4y$.

Пусть $\angle CBL=\gamma$. Тогда из треугольника BPM получаем, что $\cos\gamma=\frac{7y}{3x}$, а из треугольника BFL – что $\cos\gamma=\frac{4x}{11y}$. Приравнивая эти выражения для косинуса, находим, что $x=\frac{y\sqrt{77}}{2\sqrt{3}}$, откуда $\cos\gamma=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{33}}$.

5. Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих условию $x^2+6xy+5y^2=10^{100}$.

Ответ. 19594.

Решение. Раскладывая левую и правую части уравнения на множители, получаем $(x+5y)(x+y)=2^{100}\cdot 5^{100}$.

Поскольку каждый из множителей в левой части является целым числом, отсюда следует, что

$$\begin{cases} x+5y=2^k\cdot 5^l, \\ x+y=2^{100-k}\cdot 5^{100-l} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+5y=-2^k\cdot 5^l, \\ x+y=-2^{100-k}\cdot 5^{100-l} \end{cases}$$

где k и l – целые числа из отрезка $[0;100]$.

Найдём количество решений первой системы. Выражая из неё x и y, получаем

$$\begin{cases} y = 2^{k-2} \cdot 5^{l} - 2^{98-k} \cdot 5^{100-l}, \\ x = 5 \cdot 2^{98-k} \cdot 5^{100-l} - 2^{k-2} \cdot 5^{l}. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение. Показатели в степенях пятёрки неотрицательны. Сумма показателей в степенях двойки равна 96, поэтому хотя бы один из них положителен, т.е соответствующий ему член является целым числом. Так как в левой части равенства также целое число, то и второй член в правой части равенства должен быть целым. Значит, для существования целочисленных решений необходимо и достаточно, чтобы $2 \le k \le 98$, $0 \le l \le 100$ – всего $97 \cdot 101 = 9797$ вариантов.

Вторая система также имеет 9797 решений; итак, всего 19594 решений.

6. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся число b такое, что система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2a(a - x - y) = 64, \\ y = 8\sin(x - 2b) - 6\cos(x - 2b) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

Ответ. $a \in [-18; 18]$.

Решение. Первое уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x-a)^2 + (y-a)^2 = 8^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 8 с центром $(a; a)$.

С помощью введения вспомогательного угла второе уравнение системы может быть приведено к виду $y = 10\cos(x - 2b - \theta)$. При всевозможных $b \in \mathrm{R}$ графики этих функций заметают полосу $-10 \le y \le 10$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы окружность, задаваемая первым уравнением, имела хотя бы одну общую точку с данной полосой, откуда $a \in [-18; 18]$.

7. В основании четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$, в котором $BD = 12$ и $\angle BAC = 60^\circ$. Сфера проходит через вершины D, A, B, B_1, C_1, D_1.

а) Найдите площадь круга, полученного в сечении сферы плоскостью, проходящей через точки A_1, B_1 и C_1.

б) Найдите угол A_1CB.

в) Пусть дополнительно известно, что радиус сферы равен 8. Найдите объём призмы.

Ответ. а) 48π, б) 90°, в) $192\sqrt{3}$.

Решение. а) Так как диагонали ромба являются биссектрисами его углов, то острый угол ромба равен 60°, а $AC = 4\sqrt{3}$. В сечении шара плоскостью $A_1C_1B_1$ получаем круг, описанный около треугольника $C_1B_1D_1$. Центром этого круга является точка A_1, а его радиус равен стороне ромба, то есть $4\sqrt{3}$. Значит, площадь равна 48π.

б) Пусть O – центр шара. Опустим из точки O перпендикуляр OH на плоскость $ABCD$. Тогда треугольники OHA, OHB и OHD равны по катету и гипотенузе (OH – общая, $OA = OB = OD$ как радиусы сферы). Значит, $HA = HB = HD$, поэтому H – центр окружности, описанной около треугольника ABD, т.е. точка H совпадает с точкой C.

Таким образом, отрезок OC перпендикулярен плоскости основания $ABCD$. Аналогично доказывается, что отрезок OA_1 перпендикулярен плоскости $A_1B_1C_1D_1$. Итак, диагональ A_1C является высотой призмы, а центр сферы O – это её середина. Поэтому $\angle A_1CB = 90^\circ$.

в) В прямоугольном треугольнике AOC известны гипотенуза $AO = 8$ и катет $AC = 4\sqrt{3}$. Значит, $CO = 4$, $A_1C = 8$; $V = A_1C \cdot S_{ABCD} = 8 \cdot 24\sqrt{3} = 192\sqrt{3}$.

1. Решите неравенство $\dfrac{64+\left(\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2\right)\right)^3}{\log_{\frac{1}{5}}\left(x^6\right)\cdot\log_5\left(x^2\right)+5\log_5\left(x^6\right)+14\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2\right)+2}\leq 0$.

Ответ. $x\in\left[-25;-\sqrt{5}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}};0\right)\cup\left(0;\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)\cup\left(\sqrt{5};25\right]$.

Решение. Данное неравенство равносильно следующему:

$$\frac{64-\left(\log_5\left(x^2\right)\right)^3}{-3\log_5\left(x^2\right)\cdot\log_5\left(x^2\right)+15\log_5\left(x^2\right)-14\log_5\left(x^2\right)+2}\leq 0.$$

После замены $\log_5 x^2=t$ неравенство принимает вид $\dfrac{64-t^3}{-3t^2+t+2}\leq 0$, откуда $\dfrac{4-t}{(1-t)(2+3t)}\leq 0$,

$t\in\left(-\infty;-\dfrac{2}{3}\right)\cup(1;4]$.

Находим значения x.

При $t<-\dfrac{2}{3}$ получаем $0<x^2<5^{-2/3}\Leftrightarrow x\in\left(-\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}};0\right)\cup\left(0;\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)$.

При $1<t\leq 4$ получаем $5<x^2\leq 625\Leftrightarrow x\in\left[-25;-\sqrt{5}\right)\cup\left(\sqrt{5};25\right]$.

2. Решите уравнение $\left(\dfrac{7}{4}-3\cos 2x\right)\cdot\left|1+2\cos 2x\right|=\sin x(\sin x+\sin 5x)$.

Ответ. $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2},k\in Z$.

Решение. Преобразуем правую часть уравнения:

$$\sin x(\sin x+\sin 5x)=\sin x\cdot 2\sin 3x\cos 2x=\cos 2x\cdot(2\sin x\sin 3x)=\cos 2x\cdot(\cos 2x-\cos 4x)=$$
$$=\cos 2x\left(-2\cos^2 2x+\cos 2x+1\right)=\cos 2x(1-\cos 2x)(2\cos 2x+1).$$

Обозначим $\cos 2x=t$. Тогда уравнение принимает вид $\left(\dfrac{7}{4}-3t\right)\cdot|2t+1|=t(2t+1)(1-t)$. Возможны три случая.

а) $t=-\dfrac{1}{2}$ является корнем уравнения.

б) $t>-\dfrac{1}{2}$. Получаем $\dfrac{7}{4}-3t=t-t^2$, $t^2-4t+\dfrac{7}{4}=0$, $t=\dfrac{1}{2}$ или $t=\dfrac{7}{2}$. Подходит $t=\dfrac{1}{2}$.

в) $t<-\dfrac{1}{2}$. Получаем $-\dfrac{7}{4}+3t=t-t^2$, $t^2+2t-\dfrac{7}{4}=0$, $t=\dfrac{-2\pm\sqrt{11}}{2}$. Корень $t_1=\dfrac{-2-\sqrt{11}}{2}$ не подходит, так как $t_1<-1$; корень $t_2=\dfrac{-2+\sqrt{11}}{2}$ не подходит, так как не удовлетворяет условию $t<-\dfrac{1}{2}$.

Итого: $t=\pm\dfrac{1}{2}$, $\cos 2x=\pm\dfrac{1}{2}$, $2x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi$, $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2},k\in Z$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{6}{5},\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{3}{4},\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{2}{3}.\end{cases}$

Ответ. $(1;2;3)$.

Решение. Домножая обе части первого уравнения на $\dfrac{5}{6}x(y+z)$, обе части второго – на $\dfrac{4}{3}y(x+z)$, третьего – на $\dfrac{3}{2}z(x+y)$, получаем систему

$$\begin{cases}\frac{5}{6}(x+y+z)=xy+xz,\\ \frac{4}{3}(x+y+z)=xy+yz,\\ \frac{3}{2}(x+y+z)=xz+yz.\end{cases}$$

Сложив почленно все три уравнения и разделив полученное равенство пополам, получаем равенство

$$xy+xz+yz=\frac{11}{6}(x+y+z).$$

Вычитая из него каждое из уравнений последней системы, находим, что

$$\begin{cases}\frac{1}{3}(x+y+z)=xy,\\ (x+y+z)=yz,\\ \frac{1}{2}(x+y+z)=xz.\end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе (это возможно, так как из ОДЗ исходной системы следует, что $xyz\neq 0$), получаем, что $x=\frac{1}{3}z$, а разделив первое на третье – что $y=\frac{2}{3}z$.

Тогда второе уравнение принимает вид $2z=\frac{2}{3}z^2$, откуда $z=3$, $x=1$, $y=2$.

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM:MC=3:7$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка T такая, что $MT:TC=1:6$. Пусть дополнительно известно, что прямые LT и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

Ответ. а) $39:161$, б) $\arccos\sqrt{\frac{13}{15}}$.

Решение. а) В треугольнике ABM отрезок BP является биссектрисой и высотой, поэтому треугольник ABM равнобедренный, а BP является также его медианой. Обозначим $BM=3x$, тогда $AB=3x$, $MC=7x$. По свойству биссектрисы треугольника, $AL:LC=AB:BC=3x:10x=3:10$.

Обозначим площадь треугольника ABC через S. Тогда $S_{ABP}=\frac{1}{2}S_{ABM}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}S_{ABC}=\frac{3}{20}S$. По теореме об отношении площадей треугольников получаем $\frac{S_{APL}}{S_{AMC}}=\frac{AP}{AM}\cdot\frac{AL}{AC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{13}=\frac{3}{26}$, следовательно, $S_{APL}=\frac{3}{26}S_{AMC}=\frac{3}{26}\cdot\frac{7}{10}S$, $S_{LPMC}=\frac{23}{26}S_{AMC}=\frac{23}{26}\cdot\frac{7}{10}S=\frac{161}{260}S$. Искомое отношение равно $\frac{3}{20}S:\frac{161}{260}S=\frac{39}{161}$.

б) Так как у треугольников ABP и ALP общая высота, проведённая из вершины A, то $BP:PL=S_{ABP}:S_{ALP}=\frac{3}{20}:\frac{21}{260}=13:7$. Пусть $BP=13y$, $PL=7y$.

Пусть $\angle CBL=\gamma$. Тогда из треугольника BPM получаем, что $\cos\gamma=\frac{13y}{3x}$, а из треугольника BTL – что $\cos\gamma=\frac{4x}{20y}$. Приравнивая эти выражения для косинуса, находим, что $x=y\sqrt{\frac{65}{3}}$, откуда $\cos\gamma=\sqrt{\frac{13}{15}}$.

5. Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих условию $x^2+7xy+6y^2=15^{50}$.

Ответ. 4998.

Решение. Раскладывая левую и правую части уравнения на множители, получаем $(x+6y)(x+y)=5^{50}\cdot 3^{50}$. Поскольку каждый из множителей в левой части является целым числом, отсюда следует, что

$$\begin{cases}x+6y=5^k\cdot 3^l,\\ x+y=5^{50-k}\cdot 3^{50-l}\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}x+6y=-5^k\cdot 3^l,\\ x+y=-5^{50-k}\cdot 3^{50-l}\end{cases}$$

где k и l – целые числа из отрезка $[0;50]$.

Найдём количество решений первой системы. Выражая из неё x и y, получаем

$$\begin{cases} x = 6 \cdot 5^{49-k} \cdot 3^{50-l} - 5^{k-1} \cdot 3^l, \\ y = 5^{k-1} \cdot 3^l - 5^{49-k} \cdot 3^{50-l}. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение. Показатели в степенях тройки неотрицательны. Сумма показателей в степенях пятёрки равна 48, поэтому хотя бы один из них положителен, т.е соответствующий ему член является целым числом. Так как в левой части равенства также целое число, то и второй член в правой части равенства должен быть целым. Значит, для существования целочисленных решений необходимо и достаточно, чтобы $1 \le k \le 49$, $0 \le l \le 50$ – всего $49 \cdot 51 = 2499$ вариантов.

Вторая система также имеет 2499 решений; итак, всего 4998 решений.

6. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2b(b + x + y) = 81, \\ y = 4\cos(x + 3a) - 3\sin(x + 3a) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

Ответ. $b \in [-14; 14]$.

Решение. Первое уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x+b)^2 + (y+b)^2 = 9^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 9 с центром $(-b; -b)$.

С помощью введения вспомогательного угла второе уравнение системы может быть приведено к виду $y = 5\cos(x + 3a - \theta)$. При всевозможных $a \in \mathrm{R}$ графики этих функций заметают полосу $-5 \le y \le 5$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы окружность, задаваемая первым уравнением, имела хотя бы одну общую точку с данной полосой, откуда $b \in [-14; 14]$.

7. В основании четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$, в котором $BD = 3$ и $\angle ADC = 60^\circ$. Сфера проходит через вершины D, C, B, B_1, A_1, D_1.

а) Найдите площадь круга, полученного в сечении сферы плоскостью, проходящей через точки A_1, C_1 и D_1.

б) Найдите угол B_1C_1A.

в) Пусть дополнительно известно, что радиус сферы равен 2. Найдите объём призмы.

Ответ. а) 3π, б) 90°, в) $3\sqrt{3}$.

Решение. а) Так как $BD = 3$ и острый угол ромба равен 60°, то $AC = \sqrt{3}$. В сечении шара плоскостью $A_1C_1D_1$ получаем круг, описанный около треугольника $A_1B_1D_1$. Центром этого круга является точка C_1, а его радиус равен стороне ромба, то есть $\sqrt{3}$. Значит, площадь равна 3π.

б) Пусть O – центр шара. Опустим из точки O перпендикуляр OH на плоскость $ABCD$. Тогда треугольники OHC, OHB и OHD равны по катету и гипотенузе (OH – общая, $OC = OB = OD$ как радиусы сферы). Значит, $HC = HB = HD$, поэтому H – центр окружности, описанной около треугольника BCD, т.е. точка H совпадает с точкой A.

Таким образом, отрезок OA перпендикулярен плоскости основания $ABCD$. Аналогично доказывается, что отрезок OC_1 перпендикулярен плоскости $A_1B_1C_1D_1$. Итак, диагональ AC_1 является высотой призмы, а центр сферы O – это её середина. Поэтому $\angle B_1C_1A = 90^\circ$.

в) В прямоугольном треугольнике AOC известны гипотенуза $CO = 2$ и катет $AC = \sqrt{3}$. Значит, $AO = 1$, $AC_1 = 2$;

$$V = AC_1 \cdot S_{ABCD} = 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

1. Решите уравнение $x^{\log_2(8x)} = \dfrac{x^7}{8}$.

Ответ. $x = 2$, $x = 8$.

Решение. Логарифмируя по основанию 2, получаем $\log_2 x \cdot \log_2(8x) = \log_2 x^7 - \log_2 8$, что равносильно следующему: $\log_2^2 x + 3\log_2 x = 7\log_2 x - 3 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 = 0$, откуда $\log_2 x = 1$ или $\log_2 x = 3$; $x = 2$ или $x = 8$.

2. Решите уравнение $\dfrac{1}{2}\left|\cos 2x + \dfrac{1}{2}\right| = \sin^2 3x - \sin x \sin 3x$.

Ответ. $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathrm{Z}$.

Решение. Преобразуем правую часть уравнения:

$$\sin^2 3x - \sin x \sin 3x = \sin 3x(\sin 3x - \sin x) = \sin 3x \cdot 2\cos 2x \sin x = \cos 2x \cdot (2\sin x \sin 3x) = \cos 2x \cdot (\cos 2x - \cos 4x) =$$
$$= \cos 2x\left(-2\cos^2 2x + \cos 2x + 1\right) = \cos 2x(2\cos 2x + 1)(1 - \cos 2x).$$

Обозначим $\cos 2x = t$. Тогда уравнение принимает вид $\dfrac{1}{4} \cdot |2t + 1| = t(2t+1)(1-t)$. Возможны три случая.

а) $t = -\dfrac{1}{2}$ является корнем уравнения.

б) $t > -\dfrac{1}{2}$. Получаем $\dfrac{1}{4} = -t^2 + t$, $t^2 - t + \dfrac{1}{4} = 0$, $t = \dfrac{1}{2}$.

в) $t < -\dfrac{1}{2}$. Получаем $-\dfrac{1}{4} = -t^2 + t$, $t^2 - t - \dfrac{1}{4} = 0$, $t = \dfrac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$. Оба корня не удовлетворяют условию $t < -\dfrac{1}{2}$, поэтому они не подходят.

Итого: $t = \pm\dfrac{1}{2}$, $\cos 2x = \pm\dfrac{1}{2}$, $2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathrm{Z}$.

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 242400 и таких, что $k^2 + 2k$ делится нацело на 303.
Ответ. 3200.
Решение. Разложив делимое и делитель на множители, получаем условие $k(k+2) \vdots (3 \cdot 101)$. Значит, одно из чисел k или $(k+2)$ делится на 101. Рассмотрим два случая.

а) $k \vdots 101$, т.е. $k = 101p, p \in \mathrm{Z}$. Тогда получаем $101p(101p+2) \vdots (3 \cdot 101) \Leftrightarrow p(101p+2) \vdots 3$. Первый множитель делится на 3 при $p = 3q, q \in \mathrm{Z}$, а второй – при $p = 3q + 2, q \in \mathrm{Z}$, откуда получаем, что $k = 303q$, $k = 303q + 202$, $q \in \mathrm{Z}$.

б) $(k+2) \vdots 101$, т.е. $k = 101p + 99, p \in \mathrm{Z}$. Тогда получаем $(101p + 99)(101p + 101) \vdots (3 \cdot 101) \Leftrightarrow (101p + 99)(p+1) \vdots 3$. Первый множитель делится на 3 при $p = 3q, q \in \mathrm{Z}$, а второй – при $p = 3q + 2, q \in \mathrm{Z}$, откуда получаем, что $k = 303q + 99$, $k = 303q + 301$, $q \in \mathrm{Z}$.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа, дающие остатки $0, 202, 99, 301$ при делении на 303, то есть подходят каждые 4 из 303 подряд идущих чисел. Так как $242400 = 303 \cdot 800$, получаем $4 \cdot 800 = 3200$ чисел.

4. Решите систему $\begin{cases} 3x \geq 2y + 16, \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 25 - 26x^2 - 26y^2 = 72xy. \end{cases}$

Ответ. $(6;1)$.

Решение. Преобразуем уравнение системы (добавляем к обеим частям $36x^2 + 36y^2$):

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 + 25 + 10x^2 + 10y^2 = 36x^2 + 36y^2 + 72xy \Leftrightarrow \left(x^2 + y^2 + 5\right)^2 = (6x + 6y)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 + 5 = 6x + 6y, \\ x^2 + y^2 + 5 = -6x - 6y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-3)^2 + (y-3)^2 = 13, \\ (x+3)^2 + (y+3)^2 = 13. \end{array}\right.$$

Получаем две окружности радиуса $\sqrt{13}$ с центрами в точках $(3;3)$ и $(-3;-3)$.

Неравенство системы задаёт полуплоскость. Рассмотрим взаимное расположение каждой из окружностей с прямой $y=\frac{3x}{2}-8$, являющейся границей этой полуплоскости.

а) $\begin{cases}(x-3)^2+(y-3)^2=13,\\ y=\frac{3}{2}x-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-3)^2+\left(\frac{3x}{2}-11\right)^2=13,\\ y=\frac{3}{2}x-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{13}{4}x^2-39x+117=0,\\ y=\frac{3}{2}x-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=6,\\ y=1.\end{cases}$

б) $\begin{cases}(x+3)^2+(y+3)^2=13,\\ y=\frac{3}{2}x-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+3)^2+\left(\frac{3x}{2}-5\right)^2=13,\\ y=\frac{3}{2}x-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{13}{4}x^2-9x+21=0,\\ y=\frac{3}{2}x-8\end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$

При этом центры рассматриваемых окружностей – точки $(-3;-3)$ и $(3;3)$ – не лежат в полуплоскости, так как их координаты не удовлетворяют неравенству. Поэтому вторая окружность не имеет общих точек с полуплоскостью, а первая имеет единственную общую точку $(6;1)$.

5. На ребре SA правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S отмечена точка K такая, что $AK:KS=2:3$. Точка K является вершиной прямого кругового конуса, на окружности основания которого лежат три вершины пирамиды $SABCD$.

а) Найдите отношение $CS:CD$.

б) Пусть дополнительно известно, что высота пирамиды $SABCD$ равна 5. Найдите объём конуса.

Ответ. а) $\sqrt{3}$, б) $V=\frac{9\pi}{\sqrt{5}}$.

Решение. Пусть точка H – центр основания пирамиды. Рассмотрим треугольники AHK, BHK, CHK, DHK. У них сторона HK общая, а стороны AH, BH, CH, DH равны между собой. Поскольку углы BHK и DHK прямые, угол AHK острый, а угол CHK тупой, отсюда следует, что $CK>BK=DK>AK$.

Так как точка K равноудалена от трёх вершин пирамиды, получаем, что $BK=DK=SK$. Значит, точки B, D и S лежат на окружности основания конуса.

а) Рассмотрим треугольник ABS. Пусть $AK=2x$, $SK=3x$. Тогда $BS=5x$, $BK=3x$. Из равнобедренного треугольника BKS находим, что $\cos\angle ASB=\frac{BS}{2BK}=\frac{5}{6}$. Далее по теореме косинусов для треугольника ABS получаем, что $AB=\frac{5x}{\sqrt{3}}$. Значит, $\frac{CS}{CD}=\frac{AS}{AB}=\sqrt{3}$.

б) Высота конуса равна расстоянию от точки K до плоскости BSD. Так как $KS:AS=3:5$, то это расстояние равно $\frac{3}{5}$ расстояния от точки A до плоскости BSD, т.е $\frac{3}{5}AH=\frac{3}{5\sqrt{2}}AB=x\sqrt{\frac{3}{2}}$. Образующая конуса – это отрезок $KS=3x$. Значит, радиус основания конуса равен $\sqrt{9x^2-\frac{3}{2}x^2}=x\sqrt{\frac{15}{2}}$. Тогда его объём $V=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{15}{2}x^2\cdot x\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{5\pi\sqrt{3}x^3}{2\sqrt{2}}$.

Из прямоугольного треугольника ASH по теореме Пифагора получаем $25x^2=\frac{25x^2}{6}+25$, откуда $x=\sqrt{\frac{6}{5}}$. Значит, $V=\frac{9\pi}{\sqrt{5}}$.

6. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся такое число a, что система

$$\begin{cases}y=-b-x^2,\\ x^2+y^2+8a^2=4+4a(x+y)\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

Ответ. $b\le 2\sqrt{2}+\frac{1}{4}$.

Решение. Второе уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x-2a)^2+(y-2a)^2=2^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 2 с центром $(2a;2a)$. При всевозможных $a\in\mathrm{R}$ графики этих функций заметают полосу $x-2\sqrt{2}\le y\le x+2\sqrt{2}$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы парабола, задаваемая первым уравнением, имела хотя бы одну общую точку с данной полосой.

Найдём значение параметра b, при котором парабола касается нижней границы полосы, т.е. прямой $y=x-2\sqrt{2}$. Это означает, что уравнение $-b-x^2=x-2\sqrt{2}$ имеет ровно одно решение, откуда $b=2\sqrt{2}+\frac{1}{4}$.

При этом ордината вершины параболы $y_0=-2\sqrt{2}-\frac{1}{4}$. Подходят все значения b, при которых $y_{\text{в}}\ge y_0$, т.е. $-b\ge -2\sqrt{2}-\frac{1}{4}$, $b\le 2\sqrt{2}+\frac{1}{4}$

7. В углы A и B треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Данные окружности касаются стороны AB в точках K_1, K_2 и K соответственно, при этом $AK_1=4$, $BK_2=6$, и $AB=16$.

а) Найдите длину отрезка AK.

б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны AC в точке K_3. Найдите угол CAB, если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3.

Ответ. а) $AK=\frac{32}{5}$, б) $\angle CAB=2\arcsin\frac{3}{5}=\arccos\frac{7}{25}$.

Решение. а) Прямые AO_1 и BO_2 являются биссектрисами углов A и B треугольника, поэтому они пересекаются в точке O – центре вписанной окружности. Обозначим радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2 через r, а радиус вписанной окружности через R. Треугольники OKB и O_2K_2B подобны, коэффициент подобия равен $\frac{R}{r}$, поэтому $BK=\frac{6R}{r}$. Аналогично $AK=\frac{4R}{r}$, откуда $\frac{10R}{r}=16$, $AK=\frac{32}{5}$.

б) Из условия следует, что $O_1O=O_1K_1=r$. Опустим из точки O_1 перпендикуляр O_1H на отрезок OK. Тогда $OH=R-r=\frac{3}{5}r$, $\angle OAB=\angle OO_1H=\arcsin\frac{OH}{OO_1}=\arcsin\frac{3}{5}$. Значит, $\angle CAB=2\arcsin\frac{3}{5}=\arccos\frac{7}{25}$.

1. Решите уравнение $x^{\log_3\left(27x^2\right)} = \dfrac{x^9}{81}$.

Ответ. $x = 3$, $x = 9$.

Решение. Логарифмируя по основанию 3, получаем $\log_3 x \cdot \log_3\left(27x^2\right) = \log_3 x^9 - \log_3 81$, что равносильно следующему: $2\log_3^2 x + 3\log_3 x = 9\log_3 x - 4 \Leftrightarrow \log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 = 0$, откуда $\log_3 x = 1$ или $\log_3 x = 2$; $x = 3$ или $x = 9$.

2. Решите уравнение $\dfrac{1}{2}\left|\cos 2x - \dfrac{1}{2}\right| = \cos^2 3x + \cos x \cos 3x$.

Ответ. $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathrm{Z}$.

Решение. Преобразуем правую часть уравнения:

$$\cos^2 3x + \cos x\cos 3x = \cos 3x(\cos x + \cos 3x) = \cos 3x \cdot 2\cos 2x\cos x = \cos 2x \cdot (2\cos x\cos 3x) = \cos 2x \cdot (\cos 2x + \cos 4x) =$$
$$= \cos 2x\left(2\cos^2 2x + \cos 2x - 1\right) = \cos 2x(\cos 2x + 1)(2\cos 2x - 1).$$

Обозначим $\cos 2x = t$. Тогда уравнение принимает вид $\dfrac{1}{4}\cdot|2t-1| = t(t+1)(2t-1)$. Возможны три случая.

а) $t = \dfrac{1}{2}$ является корнем уравнения.

б) $t > \dfrac{1}{2}$. Получаем $\dfrac{1}{4} = t^2 + t$, $t^2 + t - \dfrac{1}{4} = 0$, $t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$. Оба корня не удовлетворяют условию $t > \dfrac{1}{2}$, поэтому они не подходят.

в) $t < \dfrac{1}{2}$. Получаем $-\dfrac{1}{4} = t^2 + t$, $t^2 + t + \dfrac{1}{4} = 0$, $t = -\dfrac{1}{2}$.

Итого: $t = \pm\dfrac{1}{2}$, $\cos 2x = \pm\dfrac{1}{2}$, $2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathrm{Z}$.

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 353500 и таких, что $k^2 + k$ делится нацело на 505.

Ответ. 2800.

Решение. Разложив делимое и делитель на множители, получаем условие $k(k+1) \vdots (5\cdot 101)$. Значит, одно из чисел k или $(k+1)$ делится на 101. Рассмотрим два случая.

а) $k \vdots 101$, т.е. $k = 101p, p \in \mathrm{Z}$. Тогда получаем $101p(101p+1) \vdots (5\cdot 101) \Leftrightarrow p(101p+1) \vdots 5$. Первый множитель делится на 5 при $p = 5q, q \in \mathrm{Z}$, а второй – при $p = 5q+4, q \in \mathrm{Z}$, откуда получаем, что $k = 505q$, $k = 505q + 404$, $q \in \mathrm{Z}$.

б) $(k+1) \vdots 101$, т.е. $k = 101p + 100, p \in \mathrm{Z}$. Тогда получаем $(101p+100)(101p+101) \vdots (5\cdot 101) \Leftrightarrow (101p+100)(p+1) \vdots 5$. Первый множитель делится на 5 при $p = 5q, q \in \mathrm{Z}$, а второй – при $p = 5q+4, q \in \mathrm{Z}$, откуда получаем, что $k = 505q + 100$, $k = 505q + 504$, $q \in \mathrm{Z}$.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа, дающие остатки $0, 404, 100, 504$ при делении на 505, то есть подходят каждые 4 из 505 подряд идущих чисел. Так как $353500 = 505 \cdot 700$, получаем $4 \cdot 700 = 2800$ чисел.

4. Решите систему $\begin{cases} 2x \ge 14 + y, \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 144 - 40x^2 - 40y^2 = 128xy. \end{cases}$

Ответ. $(8; 2)$.

Решение. Преобразуем уравнение системы (добавляем к обеим частям $64x^2 + 64y^2$):

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 + 144 + 24x^2 + 24y^2 = 64x^2 + 64y^2 + 128xy \Leftrightarrow \left(x^2 + y^2 + 12\right)^2 = (8x + 8y)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 + 12 = 8x + 8y, \\ x^2 + y^2 + 12 = -8x - 8y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-4)^2 + (y-4)^2 = 20, \\ (x+4)^2 + (y+4)^2 = 20. \end{array}\right.$$

Получаем две окружности радиуса $2\sqrt{5}$ с центрами в точках $(4; 4)$ и $(-4; -4)$.

Неравенство системы задаёт полуплоскость. Рассмотрим взаимное расположение каждой из окружностей с прямой $y = 2x - 14$, являющейся границей этой полуплоскости.

а) $\begin{cases}(x-4)^2+(y-4)^2=20,\\ y=2x-14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-4)^2+(2x-18)^2=20,\\ y=2x-14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x^2-80x+320=0,\\ y=2x-14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=8,\\ y=2.\end{cases}$

б) $\begin{cases}(x+4)^2+(y+4)^2=20,\\ y=2x-14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+4)^2+(2x-10)^2=20,\\ y=2x-14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x^2-32x+96=0,\\ y=2x-14\end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$

При этом центры рассматриваемых окружностей – точки $(4;4)$ и $(-4;-4)$ – не лежат в полуплоскости, так как их координаты не удовлетворяют неравенству. Поэтому вторая окружность не имеет общих точек с полуплоскостью, а первая имеет единственную общую точку $(8;2)$.

5. На ребре SB правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S отмечена точка L такая, что $BL:LS=2:5$. Точка L является вершиной прямого кругового конуса, на окружности основания которого лежат три вершины пирамиды $SABCD$.

а) Найдите отношение $AS:CD$.

б) Пусть дополнительно известно, что высота пирамиды $SABCD$ равна 7. Найдите объём конуса.

Ответ. а) $\sqrt{\frac{5}{3}}$, б) $V=\frac{125\pi}{\sqrt{21}}$.

Решение. Пусть точка H – центр основания пирамиды. Рассмотрим треугольники AHL, BHL, CHL, DHL. У них сторона HL общая, а стороны AH, BH, CH, DH равны между собой. Поскольку углы AHL и CHL прямые, угол BHL острый, а угол DHL тупой, отсюда следует, что $DL>AL=CL>BL$.

Так как точка L равноудалена от трёх вершин пирамиды, получаем, что $AL=CL=SL$. Значит, точки A, C и S лежат на окружности основания конуса.

а) Рассмотрим треугольник ABS. Пусть $BL=2x$, $SL=5x$. Тогда $AS=7x$, $AL=5x$. Из равнобедренного треугольника ALS находим, что $\cos\angle LSA=\frac{AS}{2SL}=\frac{7}{10}$. Далее по теореме косинусов для треугольника ABS получаем, что $AB=\frac{7x\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$. Значит, $\frac{AS}{CD}=\frac{AS}{AB}=\sqrt{\frac{5}{3}}$.

б) Высота конуса равна расстоянию от точки L до плоскости ASC. Так как $LS:BS=5:7$, то это расстояние равно $\frac{5}{7}$ расстояния от точки B до плоскости ASC, т.е $\frac{5}{7}BH=\frac{5}{7\sqrt{2}}AB=x\sqrt{\frac{15}{2}}$. Образующая конуса – это отрезок $LS=5x$. Значит, радиус основания конуса равен $\sqrt{25x^2-\frac{15}{2}x^2}=x\sqrt{\frac{35}{2}}$. Тогда его объём $V=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{35}{2}x^2\cdot x\sqrt{\frac{15}{2}}=\frac{35\pi\sqrt{15}x^3}{6\sqrt{2}}$.

Из прямоугольного треугольника BSH по теореме Пифагора получаем $49x^2=\frac{147x^2}{10}+49$, откуда $x=\sqrt{\frac{10}{7}}$. Значит, $V=\frac{125\pi}{\sqrt{21}}$.

6. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся такое число b, что система

$$\begin{cases}y=x^2-a,\\ x^2+y^2+8b^2=4b(y-x)+1\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

Ответ. $a\ge-\sqrt{2}-\frac{1}{4}$.

Решение. Второе уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x+2b)^2+(y-2b)^2=1^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 1 с центром $(-2b;2b)$. При всевозможных $b\in\mathrm{R}$ графики этих функций заметают полосу $-x-\sqrt{2}\le y\le -x+\sqrt{2}$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы парабола, задаваемая первым уравнением, имела хотя бы одну общую точку с данной полосой.

Найдём значение параметра a, при котором парабола касается верхней границы полосы, т.е. прямой $y=-x+\sqrt{2}$. Это означает, что уравнение $x^2-a=-x+\sqrt{2}$ имеет ровно одно решение, откуда $a=-\sqrt{2}-\frac{1}{4}$.

При этом ордината вершины параболы $y_0=\sqrt{2}+\frac{1}{4}$. Подходят все значения a, при которых $y_в \le y_0$, т.е. $-a\le\sqrt{2}+\frac{1}{4}$, $a\ge-\sqrt{2}-\frac{1}{4}$.

7. В углы B и C треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Данные окружности касаются стороны BC в точках K_1, K_2 и K соответственно, при этом $BK_1=4$, $CK_2=8$, и $BC=18$.

а) Найдите длину отрезка CK.

б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны AB в точке K_3. Найдите угол ABC, если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3.

Ответ. а) $CK=12$, б) $\angle ABC=60^\circ$.

Решение. а) Прямые CO_2 и BO_1 являются биссектрисами углов C и B треугольника, поэтому они пересекаются в точке O – центре вписанной окружности. Обозначим радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2 через r, а радиус вписанной окружности через R. Треугольники OKB и O_1K_1B подобны, коэффициент подобия равен $\frac{R}{r}$, поэтому $BK=\frac{4R}{r}$. Аналогично $CK=\frac{8R}{r}$, откуда $\frac{12R}{r}=18$, $CK=12$.

б) Из условия следует, что $O_1O=O_1K_1=r$. Опустим из точки O_1 перпендикуляр O_1H на отрезок OK. Тогда $OH=R-r=\frac{1}{2}r$, $\angle OBC=\angle OO_1H=\arcsin\frac{OH}{OO_1}=\arcsin\frac{1}{2}=30^\circ$. Значит, $\angle ABC=2\cdot30^\circ=60^\circ$.

1. Решите уравнение $x^{\log_2\left(0,25x^3\right)}=512x^4$.

Ответ. $x=\frac{1}{2}$, $x=8$.

Решение. Логарифмируя по основанию 2, получаем $\log_2 x\cdot\log_2\left(\frac{1}{4}x^3\right)=\log_2 x^4+\log_2 512$, что равносильно следующему: $3\log_2^2 x-2\log_2 x=4\log_2 x+9 \Leftrightarrow \log_2^2 x-2\log_2 x-3=0$, откуда $\log_2 x=-1$ или $\log_2 x=3$; $x=\frac{1}{2}$ или $x=8$.

2. Решите уравнение $\frac{1}{2}\left|\cos 2x+\frac{1}{2}\right|=\sin^2 x+\sin x\sin 5x$.

Ответ. $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}, k\in \mathrm{Z}$.

Решение. Преобразуем правую часть уравнения:

$$\sin^2 x+\sin x\sin 5x=\sin x(\sin x+\sin 5x)=\sin x\cdot 2\cos 2x\sin 3x=\cos 2x\cdot(2\sin x\sin 3x)=\cos 2x\cdot(\cos 2x-\cos 4x)=$$
$$=\cos 2x\left(-2\cos^2 2x+\cos 2x+1\right)=\cos 2x(2\cos 2x+1)(1-\cos 2x).$$

Обозначим $\cos 2x=t$. Тогда уравнение принимает вид $\frac{1}{4}\cdot|2t+1|=t(2t+1)(1-t)$. Возможны три случая.

а) $t=-\frac{1}{2}$ является корнем уравнения.

б) $t>-\frac{1}{2}$. Получаем $\frac{1}{4}=-t^2+t$, $t^2-t+\frac{1}{4}=0$, $t=\frac{1}{2}$.

в) $t<-\frac{1}{2}$. Получаем $-\frac{1}{4}=-t^2+t$, $t^2-t-\frac{1}{4}=0$, $t=\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$. Оба корня не удовлетворяют условию $t<-\frac{1}{2}$, поэтому они не подходят.

Итого: $t=\pm\frac{1}{2}$, $\cos 2x=\pm\frac{1}{2}$, $2x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}, k\in \mathrm{Z}$.

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 333300 и таких, что k^2-2k делится нацело на 303.

Ответ. 4400.

Решение. Разложив делимое и делитель на множители, получаем условие $k(k-2)\vdots(3\cdot 101)$. Значит, одно из чисел k или $(k-2)$ делится на 101. Рассмотрим два случая.

а) $k\vdots 101$, т.е. $k=101p, p\in \mathrm{Z}$. Тогда получаем $101p(101p-2)\vdots(3\cdot 101)\Leftrightarrow p(101p-2)\vdots 3$. Первый множитель делится на 3 при $p=3q, q\in \mathrm{Z}$, а второй – при $p=3q+1, q\in \mathrm{Z}$, откуда получаем, что $k=303q$, $k=303q+101$, $q\in \mathrm{Z}$.

б) $(k-2)\vdots 101$, т.е. $k=101p+2, p\in \mathrm{Z}$. Тогда получаем $(101p+2)101p\vdots(3\cdot 101)\Leftrightarrow(101p+2)p\vdots 3$. Первый множитель делится на 3 при $p=3q+2, q\in \mathrm{Z}$, а второй – при $p=3q, q\in \mathrm{Z}$, откуда получаем, что $k=303q+204$, $k=303q+2$, $q\in \mathrm{Z}$.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа, дающие остатки $0, 101, 204, 2$ при делении на 303, то есть подходят каждые 4 из 303 подряд идущих чисел. Так как $333300=303\cdot 1100$, получаем $4\cdot 1100=4400$ чисел.

4. Решите систему $\begin{cases}2x+y+8\le 0,\\ x^4+2x^2y^2+y^4+9-10x^2-10y^2=8xy.\end{cases}$

Ответ. $(-3;-2)$.

Решение. Преобразуем уравнение системы (добавляем к обеим частям $4x^2+4y^2$):

$$\left(x^2+y^2\right)^2+9-6x^2-6y^2=4x^2+4y^2+8xy\Leftrightarrow\left(x^2+y^2-3\right)^2=(2x+2y)^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+y^2-3=2x+2y,\\ x^2+y^2-3=-2x-2y\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(x-1)^2+(y-1)^2=5,\\ (x+1)^2+(y+1)^2=5.\end{array}\right.$$

Получаем две окружности радиуса $\sqrt{5}$ с центрами в точках $(1;1)$ и $(-1;-1)$.

Неравенство системы задаёт полуплоскость. Рассмотрим взаимное расположение каждой из окружностей с прямой $y=-2x-8$, являющейся границей этой полуплоскости.

а) $\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=5,\\ y=-2x-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2+(-2x-9)^2=5,\\ y=-2x-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x^2+34x+82=0,\\ y=-2x-8.\end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$

б) $\begin{cases}(x+1)^2+(y+1)^2=5,\\ y=-2x-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)^2+(-2x-7)^2=5,\\ y=-2x-8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x^2+30x+45=0,\\ y=-2x-8.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-3,\\ y=-2\end{cases}.$

При этом центры рассматриваемых окружностей – точки $(1;1)$ и $(-1;-1)$ – не лежат в полуплоскости, так как их координаты не удовлетворяют неравенству. Поэтому первая окружность не имеет общих точек с полуплоскостью, а вторая имеет единственную общую точку $(-3;-2)$.

5. На ребре SA правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S отмечена точка K такая, что $AK:KS=1:4$. Точка K является вершиной прямого кругового конуса, на окружности основания которого лежат три вершины пирамиды $SABCD$.

а) Найдите отношение $DS:BC$.

б) Пусть дополнительно известно, что высота пирамиды $SABCD$ равна 5. Найдите объём конуса.

Ответ. а) $\frac{2}{\sqrt{3}}$, б) $V=\frac{64\pi}{\sqrt{15}}$.

Решение. Пусть точка H – центр основания пирамиды. Рассмотрим треугольники AHK, BHK, CHK, DHK. У них сторона HK общая, а стороны AH, BH, CH, DH равны между собой. Поскольку углы BHK и DHK прямые, угол AHK острый, а угол CHK тупой, отсюда следует, что $CK>BK=DK>AK$.

Так как точка K равноудалена от трёх вершин пирамиды, получаем, что $BK=DK=SK$. Значит, точки B, D и S лежат на окружности основания конуса.

а) Рассмотрим треугольник ABS. Пусть $AK=x$, $SK=4x$. Тогда $BS=5x$, $BK=4x$. Из равнобедренного треугольника BKS находим, что $\cos\angle ASB=\frac{BS}{2BK}=\frac{5}{8}$. Далее по теореме косинусов для треугольника ABS получаем, что $AB=\frac{5x\sqrt{3}}{2}$. Значит, $\frac{DS}{BC}=\frac{AS}{AB}=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

б) Высота конуса равна расстоянию от точки K до плоскости BSD. Так как $KS:AS=4:5$, то это расстояние равно $\frac{4}{5}$ расстояния от точки A до плоскости BSD, т.е $\frac{4}{5}AH=\frac{2\sqrt{2}}{5}AB=x\sqrt{6}$. Образующая конуса – это отрезок $KS=4x$. Значит, радиус основания конуса равен $\sqrt{16x^2-6x^2}=x\sqrt{10}$. Тогда его объём $V=\frac{\pi}{3}\cdot 10x^2\cdot x\sqrt{6}=\frac{10\pi\sqrt{2}x^3}{\sqrt{3}}$.

Из прямоугольного треугольника ASH по теореме Пифагора получаем $25x^2=\frac{75x^2}{8}+25$, откуда $x=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.

Значит, $V=\frac{64\pi}{\sqrt{15}}$.

6. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся такое число a, что система

$$\begin{cases}y=b-x^2,\\ x^2+y^2+2a^2=4-2a(x+y)\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

Ответ. $b\geq -2\sqrt{2}-\frac{1}{4}$.

Решение. Второе уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x+a)^2+(y+a)^2=2^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 2 с центром $(-a;-a)$. При всевозможных $a\in\mathrm{R}$ графики этих функций заметают полосу $x-2\sqrt{2}\leq y\leq x+2\sqrt{2}$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы парабола, задаваемая первым уравнением, имела хотя бы одну общую точку с данной полосой.

Найдём значение параметра b, при котором парабола касается нижней границы полосы, т.е. прямой $y = x - 2\sqrt{2}$. Это означает, что уравнение $b - x^2 = x - 2\sqrt{2}$ имеет ровно одно решение, откуда $b = -2\sqrt{2} - \frac{1}{4}$.

При этом ордината вершины параболы $y_0 = -2\sqrt{2} - \frac{1}{4}$. Подходят все значения b, при которых $y_в \ge y_0$, т.е. $b \ge -2\sqrt{2} - \frac{1}{4}$.

7. В углы C и B треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Данные окружности касаются стороны BC в точках K_1, K_2 и K соответственно, при этом $CK_1 = 3$, $BK_2 = 7$, и $BC = 16$.

а) Найдите длину отрезка CK.

б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны AC в точке K_3. Найдите угол ACB, если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3.

Ответ. а) $CK = \frac{24}{5}$, б) $\angle ACB = 2\arcsin\frac{3}{5} = \arccos\frac{7}{25}$.

Решение. а) Прямые CO_1 и BO_2 являются биссектрисами углов C и B треугольника, поэтому они пересекаются в точке O – центре вписанной окружности. Обозначим радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2 через r, а радиус вписанной окружности через R. Треугольники OKB и O_2K_2B подобны, коэффициент подобия равен $\frac{R}{r}$, поэтому $BK = \frac{7R}{r}$. Аналогично $CK = \frac{3R}{r}$, откуда $\frac{10R}{r} = 16$, $CK = \frac{24}{5}$.

б) Из условия следует, что $O_1O = O_1K_1 = r$. Опустим из точки O_1 перпендикуляр O_1H на отрезок OK. Тогда

$OH = R - r = \frac{3}{5}r$, $\angle OCB = \angle OO_1H = \arcsin\frac{OH}{OO_1} = \arcsin\frac{3}{5}$. Значит, $\angle ACB = 2\arcsin\frac{3}{5} = \arccos\frac{7}{25}$.

1. Решите уравнение $x^{\log_5(0{,}008x)} = \dfrac{125}{x^5}$.

Ответ. $x = 5$, $x = \dfrac{1}{125}$.

Решение. Логарифмируя по основанию 5, получаем $\log_5 x \cdot \log_5\left(\dfrac{x}{125}\right) = \log_5 125 - \log_5 x^3$, что равносильно следующему: $\log_5^2 x - 3\log_5 x = 3 - 5\log_5 x \Leftrightarrow \log_5^2 x + 2\log_5 x - 3 = 0$, откуда $\log_5 x = 1$ или $\log_5 x = -3$; $x = 5$ или $x = \dfrac{1}{125}$.

2. Решите уравнение $\dfrac{1}{2}\left|\cos 2x - \dfrac{1}{2}\right| = \cos^2 x + \cos x \cos 5x$.

Ответ. $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathrm{Z}$.

Решение. Преобразуем правую часть уравнения:

$$\cos^2 x + \cos x\cos 5x = \cos x(\cos x + \cos 5x) = \cos x \cdot 2\cos 2x\cos 3x = \cos 2x \cdot (2\cos x\cos 3x) = \cos 2x \cdot (\cos 2x + \cos 4x) =$$
$$= \cos 2x\left(2\cos^2 2x + \cos 2x - 1\right) = \cos 2x(\cos 2x + 1)(2\cos 2x - 1).$$

Обозначим $\cos 2x = t$. Тогда уравнение принимает вид $\dfrac{1}{4}\cdot|2t-1| = t(t+1)(2t-1)$. Возможны три случая.

а) $t = \dfrac{1}{2}$ является корнем уравнения.

б) $t > \dfrac{1}{2}$. Получаем $\dfrac{1}{4} = t^2 + t$, $t^2 + t - \dfrac{1}{4} = 0$, $t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$. Оба корня не удовлетворяют условию $t > \dfrac{1}{2}$, поэтому они не подходят.

в) $t < \dfrac{1}{2}$. Получаем $-\dfrac{1}{4} = t^2 + t$, $t^2 + t + \dfrac{1}{4} = 0$, $t = -\dfrac{1}{2}$.

Итого: $t = \pm\dfrac{1}{2}$, $\cos 2x = \pm\dfrac{1}{2}$, $2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathrm{Z}$.

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 454500 и таких, что $k^2 - k$ делится нацело на 505.

Ответ. 3600.

Решение. Разложив делимое и делитель на множители, получаем условие $k(k-1) \vdots (5\cdot 101)$. Значит, одно из чисел k или $(k-1)$ делится на 101. Рассмотрим два случая.

а) $k \vdots 101$, т.е. $k = 101p, p \in \mathrm{Z}$. Тогда получаем $101p(101p-1) \vdots (5\cdot 101) \Leftrightarrow p(101p-1) \vdots 5$. Первый множитель делится на 5 при $p = 5q, q \in \mathrm{Z}$, а второй – при $p = 5q+1, q \in \mathrm{Z}$, откуда получаем, что $k = 505q$, $k = 505q + 101$, $q \in \mathrm{Z}$.

б) $(k-1) \vdots 101$, т.е. $k = 101p + 1, p \in \mathrm{Z}$. Тогда получаем $(101p+1)101p \vdots (5\cdot 101) \Leftrightarrow (101p+1)p \vdots 5$. Первый множитель делится на 5 при $p = 5q+4, q \in \mathrm{Z}$, а второй – при $p = 5q, q \in \mathrm{Z}$, откуда получаем, что $k = 505q + 405$, $k = 505q + 1$, $q \in \mathrm{Z}$.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа, дающие остатки $0, 101, 405, 1$ при делении на 505, то есть подходят каждые 4 из 505 подряд идущих чисел. Так как $454500 = 505 \cdot 900$, получаем $4 \cdot 900 = 3600$ чисел.

4. Решите систему $\begin{cases} x + 3y + 14 \le 0, \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 64 - 20x^2 - 20y^2 = 8xy. \end{cases}$

Ответ. $(-2; -4)$.

Решение. Преобразуем уравнение системы (добавляем к обеим частям $4x^2 + 4y^2$):

$$\left(x^2+y^2\right)^2 + 64 - 16x^2 - 16y^2 = 4x^2 + 4y^2 + 8xy \Leftrightarrow \left(x^2+y^2-8\right)^2 = (2x+2y)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 8 = 2x + 2y, \\ x^2 + y^2 - 8 = -2x - 2y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 10, \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 = 10. \end{array}\right.$$

Получаем две окружности радиуса $\sqrt{10}$ с центрами в точках $(1;1)$ и $(-1;-1)$.

Неравенство системы задаёт полуплоскость. Рассмотрим взаимное расположение каждой из окружностей с прямой $x=-3y-14$, являющейся границей этой полуплоскости.

а) $\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=10,\\ x=-3y-14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(-3y-15)^2+(y-1)^2=10,\\ x=-3y-14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}10y^2+88x+216=0,\\ x=-3y-14\end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$

б) $\begin{cases}(x+1)^2+(y+1)^2=10,\\ x=-3y-14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(-3y-13)^2+(y+1)^2=10,\\ x=-3y-14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}10y^2+80y+160=0,\\ x=-3y-14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-4,\\ x=-2.\end{cases}$.

При этом центры рассматриваемых окружностей – точки $(1;1)$ и $(-1;-1)$ – не лежат в полуплоскости, так как их координаты не удовлетворяют неравенству. Поэтому первая окружность не имеет общих точек с полуплоскостью, а вторая имеет единственную общую точку $(-2;-4)$.

5. На ребре SC правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S отмечена точка L такая, что $CL:LS=1:5$. Точка L является вершиной прямого кругового конуса, на окружности основания которого лежат три вершины пирамиды $SABCD$.

а) Найдите отношение $AS:AB$.

б) Пусть дополнительно известно, что высота пирамиды $SABCD$ равна 6. Найдите объём конуса.

Ответ. а) $\frac{\sqrt{5}}{2}$, б) $V=\frac{125\pi\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$.

Решение. Пусть точка H – центр основания пирамиды. Рассмотрим треугольники AHL, BHL, CHL, DHL. У них сторона HL общая, а стороны AH, BH, CH, DH равны между собой. Поскольку углы BHL и DHL прямые, угол CHL острый, а угол AHL тупой, отсюда следует, что $AL>BL=DL>CL$.

Так как точка L равноудалена от трёх вершин пирамиды, получаем, что $BL=DL=SL$. Значит, точки B, D и S лежат на окружности основания конуса.

а) Рассмотрим треугольник CBS. Пусть $CL=x$, $SL=5x$. Тогда $BL=5x$, $BS=6x$. Из равнобедренного треугольника BLS находим, что $\cos\angle LSB=\frac{BS}{2SL}=\frac{3}{5}$. Далее по теореме косинусов для треугольника CBS получаем, что $BC=\frac{12x}{\sqrt{5}}$. Значит, $\frac{AS}{AB}=\frac{BS}{BC}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

б) Высота конуса равна расстоянию от точки L до плоскости BSD. Так как $LS:CS=5:6$, то это расстояние равно $\frac{5}{6}$ расстояния от точки C до плоскости BSD, т.е $\frac{5}{6}CH=\frac{5}{6\sqrt{2}}BC=x\sqrt{10}$. Образующая конуса – это отрезок $LS=5x$. Значит, радиус основания конуса равен $\sqrt{25x^2-10x^2}=x\sqrt{15}$. Тогда его объём $V=\frac{\pi}{3}\cdot 15x^2\cdot x\sqrt{10}=5\pi\sqrt{10}x^3$.

Из прямоугольного треугольника CSH по теореме Пифагора получаем $36x^2=\frac{72x^2}{5}+36$, откуда $x=\sqrt{\frac{5}{3}}$.

Значит, $V=\frac{125\pi\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$.

6. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся такое число b, что система

$$\begin{cases}y=x^2+a,\\ x^2+y^2+2b^2=2b(x-y)+1\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

Ответ. $a\le\sqrt{2}+\frac{1}{4}$.

Решение. Второе уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x-b)^2+(y+b)^2=1^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 1 с центром $(b;-b)$. При всевозможных $b\in\mathbb{R}$ графики этих функций заметают полосу $-x-\sqrt{2}\le y\le -x+\sqrt{2}$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы парабола, задаваемая первым уравнением, имела хотя бы одну общую точку с данной полосой.

Найдём значение параметра a, при котором парабола касается верхней границы полосы, т.е. прямой $y=-x+\sqrt{2}$. Это означает, что уравнение $x^2+a=-x+\sqrt{2}$ имеет ровно одно решение, откуда $a=\sqrt{2}+\frac{1}{4}$.

При этом ордината вершины параболы $y_0=\sqrt{2}+\frac{1}{4}$. Подходят все значения a, при которых $y_{\text{в}}\le y_0$, т.е. $a\le\sqrt{2}+\frac{1}{4}$.

7. В углы C и A треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Данные окружности касаются стороны AC в точках K_1, K_2 и K соответственно, при этом $CK_1=6$, $AK_2=8$, и $AC=21$.

а) Найдите длину отрезка CK.

б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны BC в точке K_3. Найдите угол BCA, если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3.

Ответ. а) $CK=9$, б) $\angle ACB=60^\circ$.

Решение. а) Прямые CO_1 и AO_2 являются биссектрисами углов C и A треугольника, поэтому они пересекаются в точке O – центре вписанной окружности. Обозначим радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2 через r, а радиус вписанной окружности через R. Треугольники OKA и O_2K_2A подобны, коэффициент подобия равен $\frac{R}{r}$, поэтому $AK=\frac{8R}{r}$. Аналогично $CK=\frac{6R}{r}$, откуда $\frac{14R}{r}=21$, $CK=9$.

б) Из условия следует, что $O_1O=O_1K_1=r$. Опустим из точки O_1 перпендикуляр O_1H на отрезок OK. Тогда $OH=R-r=\frac{1}{2}r$, $\angle OCB=\angle OO_1H=\arcsin\frac{OH}{OO_1}=\arcsin\frac{1}{2}=30^\circ$. Значит, $\angle ACB=2\cdot 30^\circ=60^\circ$.