1. Решите уравнение $\dfrac{|\cos x|-\cos 3x}{\cos x\sin 2x}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Ответ. $x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$, $x=\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi, k\in Z$.

Решение. Возможны два случая.

а) $\cos x\ge 0$. Тогда $\dfrac{\cos x-\cos 3x}{\cos x\sin 2x}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\dfrac{2\sin x\sin 2x}{\cos x\sin 2x}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow \operatorname{tg} x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$. Учитывая условие, получаем $x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$.

б) $\cos x<0$. Тогда $\dfrac{-\cos x-\cos 3x}{\cos x\sin 2x}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\dfrac{-2\cos x\cos 2x}{\cos x\sin 2x}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow \operatorname{ctg} 2x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi k}{2}, k\in Z$. Косинус отрицателен при $x=\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi, k\in Z$ и при $x=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$.

2. Дан правильный 20-угольник M. Найдите количество четвёрок вершин этого 20-угольника, являющихся вершинами выпуклых четырёхугольников, у которых есть хотя бы одна пара параллельных сторон.

Ответ. 765.

Решение. Впишем данный многоугольник $K_1K_2...K_{20}$ в окружность. Каждый четырёхугольник с парой параллельных сторон определяется парой параллельных хорд с концами в точках $K_1,\dots,K_{20}$.

Рассмотрим хорду, соединяющую две соседние вершины многоугольника, например, K_6K_7. Существуют ещё 9 хорд, параллельных ей (K_5K_8 и т.д.), т.е. получается набор из 10 параллельных друг другу хорд. Из них можно образовать $C_{10}^2=45$ пар параллельных отрезков.

Аналогичные наборы мы получим, если будем рассматривать все хорды, параллельные K_1K_2, … , $K_{10}K_{11}$ – всего 10 таких наборов.

Теперь возьмём хорду, соединяющую вершины, находящиеся через одну друг от друга, например, K_6K_8. Существуют ещё 8 хорд, параллельных ей (K_5K_9 и т.д.), т.е. получается набор из 9 параллельных друг другу хорд. Из них можно образовать $C_9^2=36$ пар параллельных отрезков. Этих наборов также 10.

В итоге получаем $10\cdot 45+10\cdot 36=810$ четырёхугольников. При таком способе подсчёта прямоугольники оказались учтены дважды. Заметим, что обе диагонали вписанного в окружность прямоугольника являются диаметрами, всего диаметров с вершинами в данных точках 10, и таким образом, выходит $C_{10}^2=45$ прямоугольников. Получаем $810-45=765$ четырёхугольников, имеющих хотя бы одну пару параллельных сторон.

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 291000 и таких, что k^2-1 делится нацело на 291.

Ответ. 4000.

Решение. Разложив делимое и делитель на множители, получаем условие $(k-1)(k+1)\,\vdots\,(3\cdot 97)$. Значит, одно из чисел $(k+1)$ или $(k-1)$ делится на 97. Рассмотрим два случая.

а) $(k+1)\,\vdots\,97$, т.е. $k=97p+96, p\in Z$. Тогда получаем $(97p+95)(97p+97)\,\vdots\,(3\cdot 97)\Leftrightarrow(97p+95)(p+1)\,\vdots\,3$. Первый множитель делится на 3 при $p=3q+1, q\in Z$, а второй – при $p=3q+2, q\in Z$, откуда получаем, что $k=291q+193$, $k=291q+290$, $q\in Z$.

б) $(k-1)\,\vdots\,97$, т.е. $k=97p+1, p\in Z$. Тогда получаем $97p(97p+2)\,\vdots\,(3\cdot 97)\Leftrightarrow(97p+2)p\,\vdots\,3$. Первый множитель делится на 3 при $p=3q+1, q\in Z$, а второй – при $p=3q, q\in Z$, откуда получаем, что $k=291q+98$, $k=291q+1$, $q\in Z$.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа, дающие остатки $193, 290, 98, 1$ при делении на 291, то есть подходят каждые 4 из 291 подряд идущих чисел. Так как $291000=291\cdot 1000$, получаем $4\cdot 1000=4000$ чисел.

4. Решите систему $\begin{cases}x^2+y^2\le 2,\\ 81x^4-18x^2y^2+y^4-360x^2-40y^2+400=0.\end{cases}$

Ответ. $\left(-\frac{3}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\frac{3}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{3}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{3}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Решение. Преобразуем уравнение системы:

$$81x^4-18x^2y^2+y^4-360x^2-40y^2+400=0 \Leftrightarrow 81x^4+18x^2y^2+y^4-360x^2-40y^2+400=36x^2y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(9x^2+y^2\right)^2-40\left(9x^2+y^2\right)+400=36x^2y^2 \Leftrightarrow \left(9x^2+y^2-20\right)^2=(6xy)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}9x^2+y^2-20=6xy,\\ 9x^2+y^2-20=-6xy\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(3x-y)^2=20,\\ (3x+y)^2=20\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x-y=\pm2\sqrt{5},\\ 3x+y=\pm2\sqrt{5}.\end{array}\right.$$

В каждом из четырёх случаев выражаем y и подставляем в неравенство.

Если $y=3x+2\sqrt{5}$, то $x^2+\left(3x+2\sqrt{5}\right)^2\le 2$, $10x^2+12x\sqrt{5}+18\le 0$, $\left(x\sqrt{10}+3\sqrt{2}\right)^2\le 0$, $x=-\frac{3}{\sqrt{5}}$. Тогда $y=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Остальные случаи разбираются аналогично. В итоге получаем 4 решения: $\left(-\frac{3}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\frac{3}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{3}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{3}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

5. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases}x=|y-b|+\frac{3}{b},\\ x^2+y^2+32=a(2y-a)+12x\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

Ответ. $b\in(-\infty\ 0)\cup\left[\frac{3}{8};+\infty\right)$.

Решение. Второе уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x-6)^2+(y-a)^2=2^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 2 с центром $(6;a)$. При всевозможных $a\in\mathrm{R}$ эти окружности заметают полосу $4\le x\le 8$.

Первое уравнение задаёт “уголок” с ветвями, направленными вправо, с вершиной в точке $\left(\frac{3}{b};b\right)$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы “уголок”, задаваемый первым уравнением, имел хотя бы одну общую точку с полосой $4\le x\le 8$, а для этого нужно, чтобы абсцисса его вершины удовлетворяла неравенству $x_{\text{в}}\le 8$, т.е $\frac{3}{b}\le 8$ откуда $b\in(-\infty\ 0)\cup\left[\frac{3}{8};+\infty\right)$.

6. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Две окружности Ω_1 и Ω_2 равных радиусов с центрами O_1 и O_2 вписаны в углы BAD и BCD соответственно, при этом первая касается стороны AD в точке K, а вторая касается стороны BC в точке T.

а) Найдите радиус окружности Ω_1, если $AK=2$, $CT=8$.

б) Пусть дополнительно известно, что точка O_2 является центром окружности, описанной около треугольника BOC. Найдите угол BDC.

Ответ. а) $r=4$, б) $\angle BDC=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ или $\angle BDC=\pi-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Решение. а) Отрезки AO_1 и CO_2 являются биссектрисами углов BAD и BCD (центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла). Так как четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, сумма его противоположных углов BAD и BCD равна 180°, поэтому сумма их половин – углов KAO_1 и TCO_2 – равна 90°. Пусть $\angle O_1AK=\alpha$. Тогда $\angle TO_2C=90^\circ-\angle TCO_2=\alpha$. Выражая двумя способами $\operatorname{tg}\alpha$, получаем: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{O_1K}{AK}=\frac{CT}{O_2T}$, $\frac{r}{2}=\frac{8}{r}$, $r=4$.

б) $O_2B=O_2C$ как радиусы окружности, описанной около треугольника BOC, поэтому высота этого треугольника O_2T также является его медианой. Точки O, O_2 и T лежат на одной прямой (на серединном перпендикуляре к отрезку BC). Далее находим: $O_2C=\sqrt{O_2T^2+CT^2}=4\sqrt{5}$, $O_2O=O_2C=4\sqrt{5}$ (как радиусы одной окружности)

Возможны два случая: точки O_2 и O могут лежать либо по одну сторону от прямой BC , либо по разные стороны от неё.

В первом случае получаем: $\angle BDC=\frac{1}{2}\angle BOC=\angle COT=\operatorname{arctg}\frac{CT}{OT}=\operatorname{arctg}\frac{8}{4+4\sqrt{5}}=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Во втором случае: $\angle BDC=\pi-\frac{1}{2}\angle BOC=\pi-\angle COT=\pi-\operatorname{arctg}\frac{CT}{OT}=\pi-\operatorname{arctg}\frac{8}{4\sqrt{5}-4}=\pi-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

1. Решите уравнение $\dfrac{|\sin x|-\sin 3x}{\cos x\cos 2x}=2\sqrt{3}$.

Ответ. $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$, $x=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathrm{Z}$.

Решение. Возможны два случая.

а) $\sin x\ge 0$. Тогда $\dfrac{\sin x-\sin 3x}{\cos x\cos 2x}=2\sqrt{3}\Leftrightarrow\dfrac{-2\sin x\cos 2x}{\cos x\cos 2x}=2\sqrt{3}\Leftrightarrow \operatorname{tg} x=-\sqrt{3}\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{3}+\pi k, k\in\mathrm{Z}$. Учитывая условие, получаем $x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathrm{Z}$.

б) $\sin x<0$. Тогда $\dfrac{-\sin x-\sin 3x}{\cos x\cos 2x}=2\sqrt{3}\Leftrightarrow\dfrac{-2\cos x\sin 2x}{\cos x\cos 2x}=2\sqrt{3}\Leftrightarrow \operatorname{tg} 2x=-\sqrt{3}\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{2}, k\in\mathrm{Z}$. Синус отрицателен при $x=-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathrm{Z}$ и при $x=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathrm{Z}$.

2. Дан правильный 16-угольник M. Найдите количество четвёрок вершин этого 16-угольника, являющихся вершинами выпуклых четырёхугольников, у которых есть хотя бы одна пара параллельных сторон.

Ответ. 364.

Решение. Впишем данный многоугольник $K_1K_2...K_{16}$ в окружность. Каждый четырёхугольник с парой параллельных сторон определяется парой параллельных хорд с концами в точках $K_1,...,K_{16}$.

Рассмотрим хорду, соединяющую две соседние вершины многоугольника, например, K_6K_7. Существуют ещё 7 хорд, параллельных ей (K_5K_8 и т.д.), т.е. получается набор из 8 параллельных друг другу хорд. Из них можно образовать $C_8^2=28$ пар параллельных отрезков.

Аналогичные наборы мы получим, если будем рассматривать все хорды, параллельные K_1K_2, … , K_8K_9 – всего 8 таких наборов.

Теперь возьмём хорду, соединяющую вершины, находящиеся через одну друг от друга, например, K_6K_8. Существуют ещё 6 хорд, параллельных ей (K_5K_9 и т.д.), т.е. получается набор из 7 параллельных друг другу хорд. Из них можно образовать $C_7^2=21$ пар параллельных отрезков. Этих наборов также 8.

В итоге получаем $8\cdot 28+8\cdot 21=392$ четырёхугольников. При таком способе подсчёта прямоугольники оказались учтены дважды. Заметим, что обе диагонали вписанного в окружность прямоугольника являются диаметрами, всего диаметров с вершинами в данных точках 8, и таким образом, выходит $C_8^2=28$ прямоугольников. Получаем $392-28=364$ четырёхугольников, имеющих хотя бы одну пару параллельных сторон.

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих $445\,000$ и таких, что k^2-1 делится нацело на 445.

Ответ. 4000.

Решение. Разложив делимое и делитель на множители, получаем условие $(k-1)(k+1)\vdots(5\cdot 89)$. Значит, одно из чисел $(k+1)$ или $(k-1)$ делится на 89. Рассмотрим два случая.

а) $(k+1)\vdots 89$, т.е. $k=89p+88, p\in\mathrm{Z}$. Тогда получаем $(89p+87)(89p+89)\vdots(5\cdot 89)\Leftrightarrow(89p+87)(p+1)\vdots 5$. Первый множитель делится на 5 при $p=5q+2, q\in\mathrm{Z}$, а второй – при $p=5q+4, q\in\mathrm{Z}$, откуда получаем, что $k=445q+276$, $k=445q+444$, $q\in\mathrm{Z}$.

б) $(k-1)\vdots 89$, т.е. $k=89p+1, p\in\mathrm{Z}$. Тогда получаем $89p(89p+2)\vdots(5\cdot 89)\Leftrightarrow(89p+2)p\vdots 5$. Первый множитель делится на 5 при $p=5q+2, q\in\mathrm{Z}$, а второй – при $p=5q, q\in\mathrm{Z}$, откуда получаем, что $k=445q+179$, $k=445q+1$, $q\in\mathrm{Z}$.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа, дающие остатки $276, 444, 179, 1$ при делении на 445, то есть подходят каждые 4 из 445 подряд идущих чисел. Так как $445000=445\cdot 1000$, получаем $4\cdot 1000=4000$ чисел.

4. Решите систему $\begin{cases}x^2+y^2\le 1,\\ 16x^4-8x^2y^2+y^4-40x^2-10y^2+25=0.\end{cases}$

Ответ. $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}};\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}};-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}};-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}};\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Решение. Преобразуем уравнение системы:

$16x^4-8x^2y^2+y^4-40x^2-10y^2+25=0 \Leftrightarrow 16x^4+8x^2y^2+y^4-40x^2-10y^2+25=16x^2y^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(4x^2+y^2\right)^2-10\left(4x^2+y^2\right)+25=16x^2y^2 \Leftrightarrow \left(4x^2+y^2-5\right)^2=(4xy)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2+y^2-5=4xy, \\ 4x^2+y^2-5=-4xy \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2x-y)^2=5, \\ (2x+y)^2=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-y=\pm\sqrt{5}, \\ 2x+y=\pm\sqrt{5}. \end{array}\right.$$

В каждом из четырёх случаев выражаем y и подставляем в неравенство.

Если $y=2x+\sqrt{5}$, то $x^2+\left(2x+\sqrt{5}\right)^2\le 1$, $5x^2+4x\sqrt{5}+4\le 0$, $\left(x\sqrt{5}+2\right)^2\le 0$, $x=-\frac{2}{\sqrt{5}}$. Тогда $y=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Остальные случаи разбираются аналогично. В итоге получаем 4 решения: $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{2}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

5. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся число b такое, что система

$$\begin{cases} x=|y+a|+\frac{4}{a}, \\ x^2+y^2+24+b(2y+b)=10x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

Ответ. $a\in(-\infty\ 0)\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$.

Решение. Второе уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x-5)^2+(y+b)^2=1^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 1 с центром $(5;-b)$. При всевозможных $b\in\mathbb{R}$ эти окружности заметают полосу $4\le x\le 6$.

Первое уравнение задаёт “уголок” с ветвями, направленными вправо, с вершиной в точке $\left(\frac{4}{a};-a\right)$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы “уголок”, задаваемый первым уравнением, имел хотя бы одну общую точку с полосой $4\le x\le 6$, а для этого нужно, чтобы абсцисса его вершины удовлетворяла неравенству $x_{\text{в}}\le 6$, т.е $\frac{4}{a}\le 6$ откуда $a\in(-\infty\ 0)\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$.

6. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Две окружности Ω_1 и Ω_2 равных радиусов с центрами O_1 и O_2 вписаны в углы ABC и ADC соответственно, при этом первая касается стороны BC в точке K, а вторая касается стороны AD в точке T.

а) Найдите радиус окружности Ω_1, если $BK=3\sqrt{3}$, $DT=\sqrt{3}$.

б) Пусть дополнительно известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника BOC. Найдите угол BDC.

Ответ. а) $r=3$, б) $\angle BDC=30^\circ$.

Решение. а) Отрезки BO_1 и DO_2 являются биссектрисами углов ABC и ADC (центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла). Так как четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, сумма его противоположных углов ABC и ADC равна 180°, поэтому сумма их половин – углов KBO_1 и TDO_2 – равна 90°. Пусть $\angle O_1BK=\alpha$. Тогда $\angle TO_2D=90^\circ-\angle TDO_2=\alpha$. Выражая двумя способами $\operatorname{tg}\alpha$, получаем: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{O_1K}{BK}=\frac{DT}{O_2T}$, $\frac{r}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{r}$, $r=3$.

б) $O_1B=O_1C$ как радиусы окружности, описанной около треугольника BOC, поэтому высота O_1K этого треугольника также является его медианой. Точки O, O_1 и K лежат на одной прямой (на серединном перпендикуляре к отрезку BC). Далее находим: $O_1B=\sqrt{O_1K^2+KB^2}=6$, $O_1O=O_1B=6$ (как радиусы одной окружности).

Возможны два случая: точки O_1 и O могут лежать либо по одну сторону от прямой BC, либо по разные стороны от неё.

В первом случае получаем: $\angle BDC = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle BOK = \operatorname{arctg}\frac{BK}{KO} = \operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{3}}{9} = 30^\circ$.

Рассмотрим второй случай. Точка O_1 лежит на биссектрисе угла ABC, поэтому

$$\angle ABC = 2\angle O_1BK = 2\operatorname{arctg}\frac{O_1K}{BK} = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = 60^\circ.$$

Это означает, что вписанный угол ABC опирается на дугу AC, равную 120°. Вместе с тем дуга BC равна углу BOC, а $\angle BOC = 2\angle BOK = 2\operatorname{arctg}\frac{BK}{OK} = 2\operatorname{arctg}\frac{BK}{O_1O - r} = 2\operatorname{arctg}\sqrt{3} = 120^\circ$, что невозможно, так как в этом случае дуга AC должна быть меньше дуги BC.

1. Решите уравнение $\dfrac{|\cos x|+\cos 3x}{\sin x\cos 2x}=-2\sqrt{3}$.

Ответ. $x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$, $x=\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi$, $x=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathrm{Z}$.

Решение. Возможны два случая.

а) $\cos x\geq 0$. Тогда $\dfrac{\cos x+\cos 3x}{\sin x\cos 2x}=-2\sqrt{3}\Leftrightarrow\dfrac{2\cos x\cos 2x}{\sin x\cos 2x}=-2\sqrt{3}\Leftrightarrow \operatorname{ctg} x=-\sqrt{3}\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{6}+\pi k, k\in\mathrm{Z}$. Учитывая условие, получаем $x=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathrm{Z}$.

б) $\cos x<0$. Тогда $\dfrac{-\cos x+\cos 3x}{\sin x\cos 2x}=2\sqrt{3}\Leftrightarrow\dfrac{-2\sin x\sin 2x}{\sin x\cos 2x}=-2\sqrt{3}\Leftrightarrow \operatorname{tg} 2x=\sqrt{3}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{2}, k\in\mathrm{Z}$. Косинус отрицателен при $x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathrm{Z}$ и при $x=\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathrm{Z}$.

2. Дан правильный 22-угольник M. Найдите количество четвёрок вершин этого 22-угольника, являющихся вершинами выпуклых четырёхугольников, у которых есть хотя бы одна пара параллельных сторон.

Ответ. 1045.

Решение. Впишем данный многоугольник $K_1K_2...K_{22}$ в окружность. Каждый четырёхугольник с парой параллельных сторон определяется парой параллельных хорд с концами в точках $K_1,...,K_{22}$.

Рассмотрим хорду, соединяющую две соседние вершины многоугольника, например, K_6K_7. Существуют ещё 10 хорд, параллельных ей (K_5K_8 и т.д.), т.е. получается набор из 11 параллельных друг другу хорд. Из них можно образовать $C_{11}^2=55$ пар параллельных отрезков.

Аналогичные наборы мы получим, если будем рассматривать все хорды, параллельные K_1K_2, … , $K_{11}K_{12}$ – всего 11 таких наборов.

Теперь возьмём хорду, соединяющую вершины, находящиеся через одну друг от друга, например, K_6K_8. Существуют ещё 9 хорд, параллельных ей (K_5K_9 и т.д.), т.е. получается набор из 10 параллельных друг другу хорд. Из них можно образовать $C_{10}^2=45$ пар параллельных отрезков. Этих наборов также 11.

В итоге получаем $11\cdot 55+11\cdot 45=1100$ четырёхугольников. При таком способе подсчёта прямоугольники оказались учтены дважды. Заметим, что обе диагонали вписанного в окружность прямоугольника являются диаметрами, всего диаметров с вершинами в данных точках 11, и таким образом, выходит $C_{11}^2=55$ прямоугольников. Получаем $1100-55=1045$ четырёхугольников, имеющих хотя бы одну пару параллельных сторон.

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 485000 таких, что k^2-1 делится нацело на 485.

Ответ. 4000.

Решение. Разложив делимое и делитель на множители, получаем условие $(k-1)(k+1)\,\vdots\,(5\cdot 97)$. Значит, одно из чисел $(k+1)$ или $(k-1)$ делится на 97. Рассмотрим два случая.

а) $(k+1)\,\vdots\,97$, т.е. $k=97p+96, p\in\mathrm{Z}$. Тогда получаем $(97p+95)(97p+97)\,\vdots\,(5\cdot 97)\Leftrightarrow(97p+95)(p+1)\,\vdots\,5$. Первый множитель делится на 5 при $p=5q, q\in\mathrm{Z}$, а второй – при $p=5q+4, q\in\mathrm{Z}$, откуда получаем, что $k=485q+96$, $k=485q+484$, $q\in\mathrm{Z}$.

б) $(k-1)\,\vdots\,97$, т.е. $k=97p+1, p\in\mathrm{Z}$. Тогда получаем $97p(97p+2)\,\vdots\,(5\cdot 97)\Leftrightarrow(97p+2)p\,\vdots\,5$. Первый множитель делится на 5 при $p=5q+4, q\in\mathrm{Z}$, а второй – при $p=5q, q\in\mathrm{Z}$, откуда получаем, что $k=485q+389$, $k=485q+1$, $q\in\mathrm{Z}$.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа, дающие остатки $96, 484, 389, 1$ при делении на 485, то есть подходят каждые 4 из 485 подряд идущих чисел. Так как $485000=485\cdot 1000$, получаем $4\cdot 1000=4000$ чисел.

4. Решите систему $\begin{cases}x^2+y^2\leq 2,\\ x^4-8x^2y^2+16y^4-20x^2-80y^2+100=0.\end{cases}$

Ответ. $\left(-\frac{\sqrt2}{\sqrt5};\frac{2\sqrt2}{\sqrt5}\right)$, $\left(\frac{\sqrt2}{\sqrt5};\frac{2\sqrt2}{\sqrt5}\right)$, $\left(\frac{\sqrt2}{\sqrt5};-\frac{2\sqrt2}{\sqrt5}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt2}{\sqrt5};-\frac{2\sqrt2}{\sqrt5}\right)$.

Решение. Преобразуем уравнение системы:

$$x^4-8x^2y^2+16y^4-20x^2-80y^2+100=0 \Leftrightarrow x^4+8x^2y^2+16y^4-20x^2-80y^2+100=16x^2y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+4y^2\right)^2-20\left(x^2+4y^2\right)+100=16x^2y^2 \Leftrightarrow \left(x^2+4y^2-10\right)^2=(4xy)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+4y^2-10=4xy, \\ x^2+4y^2-10=-4xy \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-2y)^2=10, \\ (x+2y)^2=10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2y=\pm\sqrt{10}, \\ x+2y=\pm\sqrt{10}. \end{array}\right.$$

В каждом из четырёх случаев выражаем x и подставляем в неравенство.

Если $x=2y+\sqrt{10}$, то $y^2+\left(2y+\sqrt{10}\right)^2\le 2$, $5y^2+4y\sqrt{10}+8\le 0$, $\left(y\sqrt5+2\sqrt2\right)^2\le 0$, $y=-\frac{2\sqrt2}{\sqrt5}$. Тогда $x=\frac{\sqrt2}{\sqrt5}$.

Остальные случаи разбираются аналогично. В итоге получаем 4 решения: $\left(-\frac{\sqrt2}{\sqrt5};\frac{2\sqrt2}{\sqrt5}\right)$, $\left(\frac{\sqrt2}{\sqrt5};\frac{2\sqrt2}{\sqrt5}\right)$, $\left(\frac{\sqrt2}{\sqrt5};-\frac{2\sqrt2}{\sqrt5}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt2}{\sqrt5};-\frac{2\sqrt2}{\sqrt5}\right)$.

5. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases} x=\frac{7}{b}-|y+b|, \\ x^2+y^2+96=-a(2y+a)-20x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

Ответ. $b\in\left(-\infty;-\frac{7}{12}\right]\cup(0;+\infty)$.

Решение. Второе уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x+10)^2+(y+a)^2=2^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 2 с центром $(-10;-a)$. При всевозможных $a\in\mathrm{R}$ эти окружности заметают полосу $-12\le x\le -8$.

Первое уравнение задаёт “уголок” с ветвями, направленными влево, с вершиной в точке $\left(\frac{7}{b};-b\right)$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы “уголок”, задаваемый первым уравнением, имел хотя бы одну общую точку с полосой $-12\le x\le -8$, а для этого нужно, чтобы абсцисса его вершины удовлетворяла неравенству $x_{\text{в}}\ge -12$, т.е $\frac{7}{b}\ge -12$ откуда $b\in\left(-\infty;-\frac{7}{12}\right]\cup(0;+\infty)$.

6. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Две окружности Ω_1 и Ω_2 равных радиусов с центрами O_1 и O_2 вписаны в углы BAD и BCD соответственно, при этом первая касается стороны AB в точке L, а вторая касается стороны BC в точке F.

а) Найдите радиус окружности Ω_2, если $AL=\sqrt2$, $CF=2\sqrt2$.

б) Пусть дополнительно известно, что точка O_2 является центром окружности, описанной около треугольника BOC. Найдите угол BDC.

Ответ. а) $r=2$, б) $\angle BDC=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt3-1}{\sqrt2}$.

Решение. а) Отрезки AO_1 и CO_2 являются биссектрисами углов BAD и BCD (центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла). Так как четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, сумма его противоположных углов BAD и BCD равна 180°, поэтому сумма их половин – углов LAO_1 и FCO_2 – равна 90°. Пусть $\angle O_1AL=\alpha$. Тогда $\angle FO_2C=90^\circ-\angle FCO_2=\alpha$. Выражая двумя способами $\operatorname{tg}\alpha$, получаем: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{O_1L}{AL}=\frac{CF}{O_2F}$, $\frac{r}{\sqrt2}=\frac{2\sqrt2}{r}$, $r=2$.

б) $O_2B = O_2C$ как радиусы окружности, описанной около треугольника BOC, поэтому высота этого треугольника O_2F также является его медианой. Точки O, O_2 и F лежат на одной прямой (на серединном перпендикуляре к отрезку BC). Далее находим: $O_2C = \sqrt{O_2F^2 + CF^2} = 2\sqrt{3}$, $O_2O = O_2C = 2\sqrt{3}$ (как радиусы одной окружности).

Возможны два случая: точки O_2 и O могут лежать либо по одну сторону от прямой BC, либо по разные стороны от неё.

В первом случае получаем: $\angle BDC = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle COF = \operatorname{arctg}\frac{CF}{OF} = \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{2}}{2+2\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$.

Рассмотрим второй случай. Точка O_2 лежит на биссектрисе угла BCD, поэтому

$$\angle BCD = 2\angle O_2CF = 2\operatorname{arctg}\frac{O_2F}{CF} = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}} = \operatorname{arctg}\left(2\sqrt{2}\right).$$

Это означает, что вписанный угол BCD опирается на дугу BD, равную $2\operatorname{arctg}\left(2\sqrt{2}\right)$. Вместе с тем дуга BC равна углу BOC, а $\angle BOC = 2\angle COF = 2\operatorname{arctg}\frac{CF}{OF} = 2\operatorname{arctg}\frac{CF}{O_2O - r} = 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} = 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$, что невозможно, так как в этом случае дуга BD должна быть меньше дуги BC.

1. Решите уравнение $\dfrac{|\sin x|+\sin 3x}{\cos x\cos 2x}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Ответ. $x=\dfrac{\pi}{12}+2k\pi$, $x=\dfrac{7\pi}{12}+2k\pi$, $x=-\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$.

Решение. Возможны два случая.

а) $\sin x\ge 0$. Тогда $\dfrac{\sin x+\sin 3x}{\cos x\cos 2x}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\dfrac{2\cos x\sin 2x}{\cos x\cos 2x}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow \operatorname{tg} 2x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{2}, k\in Z$. Учитывая условие, получаем $x=\dfrac{\pi}{12}+2k\pi, k\in Z$ и $x=\dfrac{7\pi}{12}+2k\pi, k\in Z$.

б) $\sin x<0$. Тогда $\dfrac{-\sin x+\sin 3x}{\cos x\cos 2x}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\dfrac{2\cos 2x\sin x}{\cos x\cos 2x}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow \operatorname{tg} x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi, k\in Z$. Синус отрицателен при $x=-\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$.

2. Дан правильный 18-угольник M. Найдите количество четвёрок вершин этого 18-угольника, являющихся вершинами выпуклых четырёхугольников, у которых есть хотя бы одна пара параллельных сторон.

Ответ. 540.

Решение. Впишем данный многоугольник $K_1K_2...K_{18}$ в окружность. Каждый четырёхугольник с парой параллельных сторон определяется парой параллельных хорд с концами в точках $K_1,...,K_{18}$.

Рассмотрим хорду, соединяющую две соседние вершины многоугольника, например, K_6K_7. Существуют ещё 8 хорд, параллельных ей (K_5K_8 и т.д.), т.е. получается набор из 9 параллельных друг другу хорд. Из них можно образовать $C_9^2=36$ пар параллельных отрезков.

Аналогичные наборы мы получим, если будем рассматривать все хорды, параллельные K_1K_2, … , K_9K_{10} – всего 9 таких наборов.

Теперь возьмём хорду, соединяющую вершины, находящиеся через одну друг от друга, например, K_6K_8. Существуют ещё 7 хорд, параллельных ей (K_5K_9 и т.д.), т.е. получается набор из 8 параллельных друг другу хорд. Из них можно образовать $C_8^2=28$ пар параллельных отрезков. Этих наборов также 9.

В итоге получаем $9\cdot 36+9\cdot 28=576$ четырёхугольников. При таком способе подсчёта прямоугольники оказались учтены дважды. Заметим, что обе диагонали вписанного в окружность прямоугольника являются диаметрами, всего диаметров с вершинами в данных точках 8, и таким образом, выходит $C_9^2=36$ прямоугольников. Получаем $576-36=540$ четырёхугольников, имеющих хотя бы одну пару параллельных сторон.

3. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих $267\,000$ и таких, что k^2-1 делится нацело на 267.

Ответ. 4000.

Решение. Разложив делимое и делитель на множители, получаем условие $(k-1)(k+1)\,\vdots\,(3\cdot 89)$. Значит, одно из чисел $(k+1)$ или $(k-1)$ делится на 89. Рассмотрим два случая.

а) $(k+1)\,\vdots\,89$, т.е. $k=89p+88, p\in Z$. Тогда получаем $(89p+87)(89p+89)\,\vdots\,(3\cdot 89)\Leftrightarrow(89p+87)(p+1)\,\vdots\,3$. Первый множитель делится на 3 при $p=3q, q\in Z$, а второй – при $p=3q+2, q\in Z$, откуда получаем, что $k=267q+88$, $k=267q+266$, $q\in Z$.

б) $(k-1)\,\vdots\,89$, т.е. $k=89p+1, p\in Z$. Тогда получаем $89p(89p+2)\,\vdots\,(3\cdot 89)\Leftrightarrow(89p+2)p\,\vdots\,3$. Первый множитель делится на 3 при $p=3q+2, q\in Z$, а второй – при $p=3q, q\in Z$, откуда получаем, что $k=267q+179$, $k=267q+1$, $q\in Z$.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа, дающие остатки $88, 266, 179, 1$ при делении на 267, то есть подходят каждые 4 из 267 подряд идущих чисел. Так как $267\,000=267\cdot 1000$, получаем $4\cdot 1000=4000$ чисел.

4. Решите систему $\begin{cases}x^2+y^2\le 1,\\ x^4-18x^2y^2+81y^4-20x^2-180y^2+100=0.\end{cases}$

Ответ. $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}};-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{10}};-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

Решение. Преобразуем уравнение системы:

$$x^4-18x^2y^2+81y^4-20x^2-180y^2+100=0 \Leftrightarrow x^4+18x^2y^2+81y^4-20x^2-180y^2+100=36x^2y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+9y^2\right)^2-20\left(x^2+9y^2\right)+100=36x^2y^2 \Leftrightarrow \left(x^2+9y^2-10\right)^2=(6xy)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+9y^2-10=6xy, \\ x^2+9y^2-10=-6xy \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-3y)^2=10, \\ (x+3y)^2=10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3y=\pm\sqrt{10}, \\ x+3y=\pm\sqrt{10}. \end{array}\right.$$

В каждом из четырёх случаев выражаем x и подставляем в неравенство.

Если $x=3y+\sqrt{10}$, то $y^2+\left(3y+\sqrt{10}\right)^2\le 1$, $10y^2+6y\sqrt{10}+9\le 0$, $\left(y\sqrt{10}+3\right)^2\le 0$, $y=-\frac{3}{\sqrt{10}}$. Тогда $x=\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Остальные случаи разбираются аналогично. В итоге получаем 4 решения: $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}};-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{10}};\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{10}};-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

5. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся число b такое, что система

$$\begin{cases} x=\frac{6}{a}-|y-a|, \\ x^2+y^2+b^2+63=2(by-8x) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

Ответ. $a\in\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup(0+\infty)$.

Решение. Второе уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x+8)^2+(y-b)^2=1^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 1 с центром $(-8;b)$. При всевозможных $b\in\mathrm{R}$ эти окружности заметают полосу $-9\le x\le -7$.

Первое уравнение задаёт “уголок” с ветвями, направленными влево, с вершиной в точке $\left(\frac{6}{a};a\right)$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы “уголок”, задаваемый первым уравнением, имел хотя бы одну общую точку с полосой $-9\le x\le -7$, а для этого нужно, чтобы абсцисса его вершины удовлетворяла неравенству $x_{\text{в}}\ge -9$, т.е $\frac{6}{a}\ge -9$ откуда $a\in\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup(0+\infty)$.

6. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Две окружности Ω_1 и Ω_2 равных радиусов с центрами O_1 и O_2 вписаны в углы ABC и ADC соответственно, при этом первая касается стороны BC в точке F, а вторая касается стороны AD в точке P.

а) Найдите радиус окружности Ω_2, если $BF=3\sqrt{2}$, $DP=\sqrt{2}$.

б) Пусть дополнительно известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника BOC. Найдите угол BDC.

Ответ. а) $r=\sqrt{6}$, б) $\angle BDC=30^\circ$.

Решение. а) Отрезки BO_1 и DO_2 являются биссектрисами углов ABC и ADC (центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла). Так как четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, сумма его противоположных углов ABC и ADC равна 180°, поэтому сумма их половин – углов FBO_1 и PDO_2 – равна 90°. Пусть $\angle O_1BF=\alpha$. Тогда $\angle PO_2D=90^\circ-\angle PDO_2=\alpha$. Выражая двумя способами $\operatorname{tg}\alpha$, получаем: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{O_1F}{BF}=\frac{DP}{O_2P}$, $\frac{r}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{r}$, $r=\sqrt{6}$.

б) $O_1B=O_1C$ как радиусы окружности, описанной около треугольника BOC, поэтому высота O_1F этого треугольника также является его медианой. Точки O, O_1 и F лежат на одной прямой (на серединном перпендикуляре к отрезку BC). Далее находим: $O_1B=\sqrt{O_1F^2+FB^2}=2\sqrt{6}$, $O_1O=O_1B=2\sqrt{6}$ (как радиусы одной окружности).

Возможны два случая: точки O_1 и O могут лежать либо по одну сторону от прямой BC, либо по разные стороны от неё.

В первом случае получаем: $\angle BDC=\frac{1}{2}\angle BOC=\angle BOF=\operatorname{arctg}\frac{BF}{FO}=\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{6}}=30^\circ$.

Рассмотрим второй случай. Точка O_1 лежит на биссектрисе угла ABC, поэтому

$$\angle ABC=2\angle O_1BF=2\operatorname{arctg}\frac{O_1F}{BF}=2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=60^\circ.$$

Это означает, что вписанный угол ABC опирается на дугу AC, равную 120°. Вместе с тем дуга BC равна углу BOC, а $\angle BOC=2\angle BOF=2\operatorname{arctg}\frac{BF}{OF}=2\operatorname{arctg}\frac{BF}{O_1O-r}=2\operatorname{arctg}\sqrt{3}=120^\circ$, что невозможно, так как в этом случае дуга AC должна быть меньше дуги BC.

1. Решите неравенство $\sqrt{x^2-25}\cdot\sqrt{-2x-1}\le x^2-25$.

Ответ. $x\in(-\infty;-6]\cup\{-5\}$.

Решение. ОДЗ данного неравенства – это множество $x\in(-\infty;-5]$. Рассмотрим два случая.

а) При $x=-5$ неравенство выполнено (получаем $0=0$).

б) При $x<-5$ делим обе части неравенства на положительное число $\sqrt{x^2-25}$ и получаем $\sqrt{-2x-1}\le\sqrt{x^2-25}$; тогда $-2x-1\le x^2-25$, $x^2+2x-24\ge 0$, $x\in(-\infty;-6]\cup[4;+\infty)$. С учётом условия, получаем $x\in(-\infty;-6]$.

Объединяя результаты, находим $x\in(-\infty;-6]\cup\{-5\}$.

2. Дана функция $g(x)=\dfrac{4\sin^4x+5\cos^2x}{4\cos^4x+3\sin^2x}$. Найдите:

а) корни уравнения $g(x)=\dfrac{7}{5}$;

б) наибольшее и наименьшее значения функции $g(x)$.

Ответ. а) $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2},k\in Z$, $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi,k\in Z$; б) $g_{\min}=\dfrac{5}{4}$, $g_{\max}=\dfrac{55}{39}$.

Решение. Преобразуем данную функцию:

$$g(x)=\frac{4\left(1-\cos^2x\right)^2+5\cos^2x}{4\cos^4x+3-3\cos^2x}=\frac{4\cos^4x-3\cos^2x+4}{4\cos^4x-3\cos^2x+3}=1+\frac{1}{4\cos^4x-3\cos^2x+3}.$$

Обозначим $\cos^2x=t\in[0;1]$.

а) После замены уравнение принимает вид $1+\dfrac{1}{4t^2-3t+3}=\dfrac{7}{5}\Leftrightarrow 4t^2-3t+3=\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0{,}25,\\ t=0{,}5.\end{array}\right.$

Возвращаясь к переменой x, получаем $\cos^2x=0{,}25$ или $\cos^2x=0{,}5$, откуда $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2},k\in Z$ или $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi,k\in Z$.

б) Знаменатель дроби положителен при всех t, а в числителе – фиксированное положительное число, поэтому максимум дроби достигается при минимуме знаменателя, а минимум дроби – при максимуме знаменателя.

Итак, $g_{\min}=g(1)=\dfrac{5}{4}$, $g_{\max}=g\left(\dfrac{3}{8}\right)=\dfrac{55}{39}$. (Минимум знаменателя получается в вершине параболы, т.е. при $t=\dfrac{3}{8}$, а максимум – в точке, наиболее удалённой от вершины, т.е. при $t=1$.)

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=-\dfrac{2}{15},\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}=-\dfrac{2}{3},\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=-\dfrac{1}{4}.\end{cases}$

Ответ. $(5;-1;-2)$.

Решение. Домножая обе части первого уравнения на $-\dfrac{15}{2}x(y+z)$, обе части второго – на $-\dfrac{3}{2}y(x+z)$, третьего – на $-4z(x+y)$, получаем систему

$$\begin{cases}-7{,}5(x+y+z)=xy+xz,\\ -1{,}5(x+y+z)=xy+yz,\\ -4(x+y+z)=xz+yz.\end{cases}$$

Сложив почленно все три уравнения и разделив полученное равенство пополам, получаем равенство

$$xy+xz+yz=-6{,}5(x+y+z).$$

Вычитая из него каждое из уравнений последней системы, находим, что

$$\begin{cases}-2{,}5(x+y+z)=xy,\\ (x+y+z)=yz,\\ -5(x+y+z)=xz.\end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе (это возможно, так как из ОДЗ исходной системы следует, что $xyz \neq 0$), получаем, что $x = -2{,}5z$, а разделив первое на третье – что $y = 0{,}5z$.

Тогда второе уравнение принимает вид $-z = 0{,}5z^2$, откуда $z = -2$, $x = 5$, $y = -1$.

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM : MC = 2 : 5$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка F такая, что $MF : FC = 1 : 4$. Пусть дополнительно известно, что прямые LF и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

Ответ. а) $9 : 40$, б) $\arccos\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.

Решение. а) В треугольнике ABM отрезок BP является биссектрисой и высотой, поэтому треугольник ABM равнобедренный, а BP является также его медианой. Обозначим $BM = 2x$, тогда $AB = 2x$, $MC = 5x$. По свойству биссектрисы треугольника, $AL : LC = AB : BC = 2x : 7x = 2 : 7$.

Обозначим площадь треугольника ABC через S. Тогда $S_{ABP} = \frac{1}{2}S_{ABM} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}S_{ABC} = \frac{1}{7}S$. По теореме об отношении площадей треугольников получаем $\dfrac{S_{APL}}{S_{AMC}} = \dfrac{AP}{AM}\cdot\dfrac{AL}{AC} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{9} = \dfrac{1}{9}$, следовательно, $S_{APL} = \frac{1}{9}S_{AMC} = \frac{1}{9}\cdot\frac{5}{7}S$, $S_{LPMC} = \frac{8}{9}S_{AMC} = \frac{8}{9}\cdot\frac{5}{7}S = \frac{40}{63}S$. Искомое отношение равно $\frac{1}{7}S : \frac{40}{63}S = \frac{9}{40}$.

б) Так как у треугольников ABP и ALP общая высота, проведённая из вершины A, то $BP : PL = S_{ABP} : S_{ALP} = \frac{1}{7} : \frac{5}{9\cdot 7} = 9 : 5$. Пусть $BP = 9y$, $PL = 5y$.

Пусть $\angle CBL = \gamma$. Тогда из треугольника BPM получаем, что $\cos\gamma = \dfrac{9y}{2x}$, а из треугольника BFL – что $\cos\gamma = \dfrac{3x}{14y}$. Приравнивая эти выражения для косинуса, находим, что $x = y\sqrt{21}$, откуда $\cos\gamma = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.

5. Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих условию $5x^2 - 6xy + y^2 = 6^{100}$.

Ответ. 19594.

Решение. Раскладывая левую и правую части уравнения на множители, получаем $(5x - y)(x - y) = 2^{100}\cdot 3^{100}$. Поскольку каждый из множителей в левой части является целым числом, отсюда следует, что

$$\begin{cases} 5x - y = 2^k\cdot 3^l, \\ x - y = 2^{100-k}\cdot 3^{100-l} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 5x - y = -2^k\cdot 3^l, \\ x - y = -2^{100-k}\cdot 3^{100-l}, \end{cases}$$

где k и l – целые числа из отрезка $[0; 100]$.

Найдём количество решений первой системы. Выражая из неё x и y, получаем

$$\begin{cases} x = 2^{k-2}\cdot 3^l - 2^{98-k}\cdot 3^{100-l}, \\ y = 2^{k-2}\cdot 3^l - 5\cdot 2^{98-k}\cdot 3^{100-l}. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение. Показатели в степенях тройки неотрицательны. Сумма показателей в степенях двойки равна 96, поэтому хотя бы один из них положителен, т.е соответствующий ему член является целым числом. Так как в левой части равенства также целое число, то и второй член в правой части равенства должен быть целым. Значит, для существования целочисленных решений необходимо и достаточно, чтобы $2 \le k \le 98$, $0 \le l \le 100$ – всего $97\cdot 101 = 9797$ вариантов.

Вторая система также имеет 9797 решений; итак, всего 19594 решений.

6. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся число b такое, что система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2a(a + y - x) = 49, \\ y = \dfrac{8}{(x-b)^2 + 1} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

Ответ. $a \in [-15; 7)$.

Решение. Первое уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x-a)^2+(y+a)^2=7^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 7 с центром $(a;-a)$.

Рассмотрим функцию, заданную вторым уравнением при $b=0$. В точке $x=0$ она принимает максимальное значение, равно 8. При увеличении x по модулю функция убывает и стремится к нулю при $x\to\infty$. Если изменять b, то график сдвигается на $|b|$ единиц влево или вправо. При всевозможных $b\in\mathrm{R}$ графики этих функций заметают полосу $0<y\leq 8$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы окружность, задаваемая первым уравнением, имела хотя бы одну общую точку с данной полосой, откуда $a\in[-15;7)$.

1. Решите неравенство $\sqrt{x^2-16}\cdot\sqrt{2x-1}\le x^2-16$.

Ответ. $x\in\{4\}\cup[5;+\infty)$.

Решение. ОДЗ данного неравенства – это множество $x\in[4;+\infty)$. Рассмотрим два случая.

а) При $x=4$ неравенство выполнено (получаем $0=0$).

б) При $x>4$ делим обе части неравенства на положительное число $\sqrt{x^2-16}$ и получаем $\sqrt{2x-1}\le\sqrt{x^2-16}$; тогда $2x-1\le x^2-16$, $x^2-2x-15\ge 0$, $x\in(-\infty;-3]\cup[5;+\infty)$. С учётом условия, получаем $x\in[5;+\infty)$.

Объединяя результаты, находим $x\in\{4\}\cup[5;+\infty)$.

2. Дана функция $g(x)=\dfrac{2\cos^4 x+\sin^2 x}{2\sin^4 x+3\cos^2 x}$. Найдите:

а) корни уравнения $g(x)=\dfrac{1}{2}$;

б) наибольшее и наименьшее значения функции $g(x)$.

Ответ. а) $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in Z$, $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$; б) $g_{\min}=\dfrac{7}{15}$, $g_{\max}=\dfrac{2}{3}$.

Решение. Преобразуем данную функцию:

$$g(x)=\frac{2\cos^4 x+1-\cos^2 x}{2\left(1-\cos^2 x\right)^2+3\cos^2 x}=\frac{2\cos^4 x-\cos^2 x+1}{2\cos^4 x-\cos^2 x+2}=1-\frac{1}{2\cos^4 x-\cos^2 x+2}.$$

Обозначим $\cos^2 x=t\in[0;1]$.

а) После замены уравнение принимает вид $1-\dfrac{1}{2t^2-t+2}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2t^2-t+2=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0,\\ t=0{,}5.\end{array}\right.$

Возвращаясь к переменой x, получаем $\cos^2 x=0$ или $\cos^2 x=0{,}5$, откуда $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in Z$ или $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$.

б) Знаменатель дроби положителен при всех t, а в числителе – фиксированное положительное число, поэтому максимум дроби достигается при минимуме знаменателя, а минимум дроби – при максимуме знаменателя. Итак, $g_{\min}=g\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{7}{15}$, $g_{\max}=g(1)=\dfrac{2}{3}$. (Минимум знаменателя получается в вершине параболы, т.е. при $t=\dfrac{1}{4}$, а максимум – в точке, наиболее удалённой от вершины, т.е. при $t=1$.)

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{1}{12},\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{1}{6},\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

Ответ. $(-4;2;1)$.

Решение. Домножая обе части первого уравнения на $12x(y+z)$, обе части второго – на $6y(x+z)$, третьего – на $2z(x+y)$, получаем систему

$$\begin{cases}12(x+y+z)=xy+xz,\\ 6(x+y+z)=xy+yz,\\ 2(x+y+z)=xz+yz.\end{cases}$$

Сложив почленно все три уравнения и разделив полученное равенство пополам, получаем равенство

$$xy+xz+yz=10(x+y+z).$$

Вычитая из него каждое из уравнений последней системы, находим, что

$$\begin{cases}8(x+y+z)=xy,\\ -2(x+y+z)=yz,\\ 4(x+y+z)=xz.\end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе (это возможно, так как из ОДЗ исходной системы следует, что $xyz \neq 0$), получаем, что $x = -4z$, а разделив первое на третье – что $y = 2z$.

Тогда второе уравнение принимает вид $2z = 2z^2$, откуда $z = 1$, $x = -4$, $y = 2$.

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM : MC = 2 : 7$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка T такая, что $MT : TC = 1 : 6$. Пусть дополнительно известно, что прямые LT и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

Ответ. а) $11 : 70$, б) $\arccos\dfrac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$.

Решение. а) В треугольнике ABM отрезок BP является биссектрисой и высотой, поэтому треугольник ABM равнобедренный, а BP является также его медианой. Обозначим $BM = 2x$, тогда $AB = 2x$, $MC = 7x$. По свойству биссектрисы треугольника, $AL : LC = AB : BC = 2x : 9x = 2 : 9$.

Обозначим площадь треугольника ABC через S. Тогда $S_{ABP} = \dfrac{1}{2} S_{ABM} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{9} S_{ABC} = \dfrac{1}{9} S$. По теореме об отношении площадей треугольников получаем $\dfrac{S_{APL}}{S_{AMC}} = \dfrac{AP}{AM} \cdot \dfrac{AL}{AC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{11} = \dfrac{1}{11}$, следовательно, $S_{APL} = \dfrac{1}{11} S_{AMC} = \dfrac{1}{11} \cdot \dfrac{7}{9} S$, $S_{LPMC} = \dfrac{10}{11} S_{AMC} = \dfrac{10}{11} \cdot \dfrac{7}{9} S = \dfrac{70}{99} S$. Искомое отношение равно $\dfrac{1}{9} S : \dfrac{70}{99} S = \dfrac{11}{70}$.

б) Так как у треугольников ABP и ALP общая высота, проведённая из вершины A, то $BP : PL = S_{ABP} : S_{ALP} = \dfrac{1}{9} : \dfrac{7}{9 \cdot 11} = 11 : 7$. Пусть $BP = 11y$, $PL = 7y$.

Пусть $\angle CBL = \gamma$. Тогда из треугольника BPM получаем, что $\cos\gamma = \dfrac{11y}{2x}$, а из треугольника BFL – что $\cos\gamma = \dfrac{3x}{18y}$. Приравнивая эти выражения для косинуса, находим, что $x = y\sqrt{33}$, откуда $\cos\gamma = \dfrac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$.

5. Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих условию $6x^2 - 7xy + y^2 = 10^{100}$.

Ответ. 19998.

Решение. Раскладывая левую и правую части уравнения на множители, получаем $(6x - y)(x - y) = 2^{100} \cdot 5^{100}$. Поскольку каждый из множителей в левой части является целым числом, отсюда следует, что

$$\begin{cases} 6x - y = 2^k \cdot 5^l, \\ x - y = 2^{100-k} \cdot 5^{100-l} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 6x - y = -2^k \cdot 5^l, \\ x - y = -2^{100-k} \cdot 5^{100-l}, \end{cases}$$

где k и l – целые числа из отрезка $[0; 100]$.

Найдём количество решений первой системы. Выражая из неё x и y, получаем

$$\begin{cases} x = 2^k \cdot 5^{l-1} - 2^{100-k} \cdot 5^{99-l}, \\ y = 2^k \cdot 5^{l-1} - 6 \cdot 2^{100-k} \cdot 5^{99-l}. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение. Показатели в степенях двойки неотрицательны. Сумма показателей в степенях пятёрки равна 98, поэтому хотя бы один из них положителен, т.е соответствующий ему член является целым числом. Так как в левой части равенства также целое число, то и второй член в правой части равенства должен быть целым. Значит, для существования целочисленных решений необходимо и достаточно, чтобы $0 \le k \le 100$, $1 \le l \le 99$ – всего $99 \cdot 101 = 9999$ вариантов.

Вторая система также имеет 9999 решений; итак, всего 19998 решений.

6. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2b(b - x + y) = 4, \\ y = \dfrac{9}{(x + a)^2 + 1} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

Ответ. $b \in [-11; 2)$.

Решение. Первое уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x-b)^2+(y+b)^2=2^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 2 с центром $(b;-b)$.

Рассмотрим функцию, заданную вторым уравнением при $a=0$. В точке $x=0$ она принимает максимальное значение, равно 9. При увеличении x по модулю функция убывает и стремится к нулю при $x\to\infty$. Если изменять a, то график сдвигается на $|a|$ единиц влево или вправо. При всевозможных $a\in\mathrm{R}$ графики этих функций заметают полосу $0<y\leq 9$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы окружность, задаваемая первым уравнением, имела хотя бы одну общую точку с данной полосой, откуда $b\in[-11;2)$.

1. Решите неравенство $\sqrt{x^2-9}\cdot\sqrt{-2x-1}\le x^2-9$.

Ответ. $x\in(-\infty;-4]\cup\{-3\}$.

Решение. ОДЗ данного неравенства – это множество $x\in(-\infty;-5]$. Рассмотрим два случая.

а) При $x=-3$ неравенство выполнено (получаем $0=0$).

б) При $x<-3$ делим обе части неравенства на положительное число $\sqrt{x^2-9}$ и получаем $\sqrt{-2x-1}\le\sqrt{x^2-9}$; тогда $-2x-1\le x^2-9$, $x^2+2x-8\ge 0$, $x\in(-\infty;-4]\cup[2;+\infty)$. С учётом условия, получаем $x\in(-\infty;-4]$.

Объединяя результаты, находим $x\in(-\infty;-4]\cup\{-3\}$.

2. Дана функция $g(x)=\dfrac{4\cos^4 x+5\sin^2 x}{4\sin^4 x+3\cos^2 x}$. Найдите:

а) корни уравнения $g(x)=\dfrac{4}{3}$;

б) наибольшее и наименьшее значения функции $g(x)$.

Ответ. а) $x=\dfrac{k\pi}{3}, k\in Z$; б) $g_{\min}=\dfrac{5}{4}$, $g_{\max}=\dfrac{55}{39}$.

Решение. Преобразуем данную функцию:

$$g(x)=\frac{4\cos^4 x+5-5\cos^2 x}{4\left(1-\cos^2 x\right)^2+3\cos^2 x}=\frac{4\cos^4 x-5\cos^2 x+5}{4\cos^4 x-5\cos^2 x+4}=1+\frac{1}{4\cos^4 x-5\cos^2 x+4}.$$

Обозначим $\cos^2 x=t\in[0;1]$.

а) После замены уравнение принимает вид $1+\dfrac{1}{4t^2-5t+4}=\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow 4t^2-5t+4=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1,\\ t=0{,}25.\end{array}\right.$

Возвращаясь к переменой x, получаем $\cos^2 x=1$ или $\cos^2 x=0{,}25$, откуда $x=\dfrac{k\pi}{3}, k\in Z$.

б) Знаменатель дроби положителен при всех t, а в числителе – фиксированное положительное число, поэтому максимум дроби достигается при минимуме знаменателя, а минимум дроби – при максимуме знаменателя.

Итак, $g_{\min}=g(0)=\dfrac{5}{4}$, $g_{\max}=g\left(\dfrac{5}{8}\right)=\dfrac{55}{39}$. (Минимум знаменателя получается в вершине параболы, т.е. при $t=\dfrac{5}{8}$, а максимум – в точке, наиболее удалённой от вершины, т.е. при $t=0$.)

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=1,\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{4}{3},\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=-\dfrac{4}{5}.\end{cases}$

Ответ. $(2;3;-1)$.

Решение. Домножая обе части первого уравнения на $x(y+z)$, обе части второго – на $\dfrac{3}{4}y(x+z)$, третьего – на $-\dfrac{5}{4}z(x+y)$, получаем систему

$$\begin{cases}(x+y+z)=xy+xz,\\ \dfrac{3}{4}(x+y+z)=xy+yz,\\ -\dfrac{5}{4}(x+y+z)=xz+yz.\end{cases}$$

Сложив почленно все три уравнения и разделив полученное равенство пополам, получаем равенство

$$xy+xz+yz=\frac{1}{4}(x+y+z).$$

Вычитая из него каждое из уравнений последней системы, находим, что

$$\begin{cases} \frac{3}{2}(x+y+z)=xy, \\ -\frac{3}{4}(x+y+z)=yz, \\ -\frac{1}{2}(x+y+z)=xz. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе (это возможно, так как из ОДЗ исходной системы следует, что $xyz \neq 0$), получаем, что $x=-2z$, а разделив первое на третье – что $y=-3z$.

Тогда второе уравнение принимает вид $3z=-3z^2$, откуда $z=-1$, $x=2$, $y=3$.

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM:MC=3:8$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка F такая, что $MF:FC=1:7$. Пусть дополнительно известно, что прямые LF и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

Ответ. а) $21:100$, б) $\arccos\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{33}}$.

Решение. а) В треугольнике ABM отрезок BP является биссектрисой и высотой, поэтому треугольник ABM равнобедренный, а BP является также его медианой. Обозначим $BM=3x$, тогда $AB=3x$, $MC=8x$. По свойству биссектрисы треугольника, $AL:LC=AB:BC=3x:11x=3:11$.

Обозначим площадь треугольника ABC через S. Тогда $S_{ABP}=\frac{1}{2}S_{ABM}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{11}S_{ABC}=\frac{3}{22}S$. По теореме об отношении площадей треугольников получаем $\frac{S_{APL}}{S_{AMC}}=\frac{AP}{AM}\cdot\frac{AL}{AC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{14}=\frac{3}{28}$, следовательно, $S_{APL}=\frac{3}{28}S_{AMC}=\frac{3}{28}\cdot\frac{8}{11}S$, $S_{LPMC}=\frac{25}{28}S_{AMC}=\frac{25}{28}\cdot\frac{8}{11}S=\frac{50}{77}S$. Искомое отношение равно $\frac{3}{22}S:\frac{50}{77}S=\frac{21}{100}$.

б) Так как у треугольников ABP и ALP общая высота, проведённая из вершины A, то $BP:PL=S_{ABP}:S_{ALP}=\frac{3}{22}:\frac{6}{77}=7:4$. Пусть $BP=7y$, $PL=4y$.

Пусть $\angle CBL=\gamma$. Тогда из треугольника BPM получаем, что $\cos\gamma=\frac{7y}{3x}$, а из треугольника BFL – что $\cos\gamma=\frac{4x}{11y}$. Приравнивая эти выражения для косинуса, находим, что $x=\frac{y\sqrt{77}}{2\sqrt{3}}$, откуда $\cos\gamma=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{33}}$.

5. Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих условию $x^2+6xy+5y^2=10^{100}$.

Ответ. 19594.

Решение. Раскладывая левую и правую части уравнения на множители, получаем $(x+5y)(x+y)=2^{100}\cdot 5^{100}$. Поскольку каждый из множителей в левой части является целым числом, отсюда следует, что

$$\begin{cases} x+5y=2^k\cdot 5^l, \\ x+y=2^{100-k}\cdot 5^{100-l} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+5y=-2^k\cdot 5^l, \\ x+y=-2^{100-k}\cdot 5^{100-l} \end{cases}$$

где k и l – целые числа из отрезка $[0;100]$.

Найдём количество решений первой системы. Выражая из неё x и y, получаем

$$\begin{cases} y=2^{k-2}\cdot 5^l-2^{98-k}\cdot 5^{100-l}, \\ x=5\cdot 2^{98-k}\cdot 5^{100-l}-2^{k-2}\cdot 5^l. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение. Показатели в степенях пятёрки неотрицательны. Сумма показателей в степенях двойки равна 96, поэтому хотя бы один из них положителен, т.е соответствующий ему член является целым числом. Так как в левой части равенства также целое число, то и второй член в правой части равенства должен быть целым. Значит, для существования целочисленных решений необходимо и достаточно, чтобы $2\le k\le 98$, $0\le l\le 100$ – всего $97\cdot 101=9797$ вариантов.

Вторая система также имеет 9797 решений; итак, всего 19594 решений.

6. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся число b такое, что система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2a(a - x - y) = 64, \\ y = \dfrac{7}{(x+b)^2 + 1} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

Ответ. $a \in (-8; 15]$.

Решение. Первое уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x-a)^2 + (y-a)^2 = 8^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 8 с центром $(a; a)$.

Рассмотрим функцию, заданную вторым уравнением при $b = 0$. В точке $x = 0$ она принимает максимальное значение, равно 7. При увеличении x по модулю функция убывает и стремится к нулю при $x \to \infty$. Если изменять b, то график сдвигается на $|b|$ единиц влево или вправо. При всевозможных $b \in \mathrm{R}$ графики этих функций заметают полосу $0 < y \leq 7$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы окружность, задаваемая первым уравнением, имела хотя бы одну общую точку с данной полосой, откуда $a \in (-8; 15]$.

1. Решите неравенство $\sqrt{x^2-4}\cdot\sqrt{2x-1}\le x^2-4$.

Ответ. $x\in\{2\}\cup[3;+\infty)$.

Решение. ОДЗ данного неравенства – это множество $x\in[2;+\infty)$. Рассмотрим два случая.

а) При $x=2$ неравенство выполнено (получаем $0=0$).

б) При $x>2$ делим обе части неравенства на положительное число $\sqrt{x^2-4}$ и получаем $\sqrt{2x-1}\le\sqrt{x^2-4}$; тогда $2x-1\le x^2-4$, $x^2-2x-3\ge 0$, $x\in(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$. С учётом условия, получаем $x\in[3;+\infty)$.

Объединяя результаты, находим $x\in\{2\}\cup[3;+\infty)$.

2. Дана функция $g(x)=\dfrac{4\sin^4 x+7\cos^2 x}{4\cos^4 x+\sin^2 x}$. Найдите:

а) корни уравнения $g(x)=4$;

б) наибольшее и наименьшее значения функции $g(x)$.

Ответ. а) $x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathrm{Z}$, $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathrm{Z}$; б) $g_{\min}=\frac{7}{4}$, $g_{\max}=\frac{63}{15}$.

Решение. Преобразуем данную функцию:

$$g(x)=\frac{4\left(1-\cos^2 x\right)^2+7\cos^2 x}{4\cos^4 x+1-\cos^2 x}=\frac{4\cos^4 x-\cos^2 x+4}{4\cos^4 x-\cos^2 x+1}=1+\frac{3}{4\cos^4 x-\cos^2 x+1}.$$

Обозначим $\cos^2 x=t\in[0;1]$.

а) После замены уравнение принимает вид $1+\dfrac{3}{4t^2-t+1}=4\Leftrightarrow 4t^2-t+1=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0,\\ t=0{,}25.\end{array}\right.$

Возвращаясь к переменой x, получаем $\cos^2 x=0$ или $\cos^2 x=0{,}25$, откуда $x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathrm{Z}$ или $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathrm{Z}$.

б) Знаменатель дроби положителен при всех t, а в числителе – фиксированное положительное число, поэтому максимум дроби достигается при минимуме знаменателя, а минимум дроби – при максимуме знаменателя. Итак, $g_{\min}=g(1)=\frac{7}{4}$, $g_{\max}=g\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{63}{15}$. (Минимум знаменателя получается в вершине параболы, т.е. при $t=\frac{1}{8}$, а максимум – в точке, наиболее удалённой от вершины, т.е. при $t=1$.)

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{6}{5},\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{3}{4},\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{2}{3}.\end{cases}$

Ответ. $(1;2;3)$.

Решение. Домножая обе части первого уравнения на $\frac{5}{6}x(y+z)$, обе части второго – на $\frac{4}{3}y(x+z)$, третьего – на $\frac{3}{2}z(x+y)$, получаем систему

$$\begin{cases}\frac{5}{6}(x+y+z)=xy+xz,\\ \frac{4}{3}(x+y+z)=xy+yz,\\ \frac{3}{2}(x+y+z)=xz+yz.\end{cases}$$

Сложив почленно все три уравнения и разделив полученное равенство пополам, получаем равенство

$$xy+xz+yz=\frac{11}{6}(x+y+z).$$

Вычитая из него каждое из уравнений последней системы, находим, что

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(x+y+z)=xy, \\ (x+y+z)=yz, \\ \frac{1}{2}(x+y+z)=xz. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе (это возможно, так как из ОДЗ исходной системы следует, что $xyz \neq 0$), получаем, что $x=\frac{1}{3}z$, а разделив первое на третье – что $y=\frac{2}{3}z$.

Тогда второе уравнение принимает вид $2z=\frac{2}{3}z^2$, откуда $z=3$, $x=1$, $y=2$.

4. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $BM:MC=3:7$. Биссектриса BL данного треугольника и отрезок AM пересекаются в точке P под углом 90°.

а) Найдите отношение площади треугольника ABP к площади четырёхугольника $LPMC$.

б) На отрезке MC отмечена точка T такая, что $MT:TC=1:6$. Пусть дополнительно известно, что прямые LT и BC перпендикулярны. Найдите угол CBL.

Ответ. а) $39:161$, б) $\arccos\sqrt{\frac{13}{15}}$.

Решение. а) В треугольнике ABM отрезок BP является биссектрисой и высотой, поэтому треугольник ABM равнобедренный, а BP является также его медианой. Обозначим $BM=3x$, тогда $AB=3x$, $MC=7x$. По свойству биссектрисы треугольника, $AL:LC=AB:BC=3x:10x=3:10$.

Обозначим площадь треугольника ABC через S. Тогда $S_{ABP}=\frac{1}{2}S_{ABM}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}S_{ABC}=\frac{3}{20}S$. По теореме об отношении площадей треугольников получаем $\frac{S_{APL}}{S_{AMC}}=\frac{AP}{AM}\cdot\frac{AL}{AC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{13}=\frac{3}{26}$, следовательно, $S_{APL}=\frac{3}{26}S_{AMC}=\frac{3}{26}\cdot\frac{7}{10}S$, $S_{LPMC}=\frac{23}{26}S_{AMC}=\frac{23}{26}\cdot\frac{7}{10}S=\frac{161}{260}S$. Искомое отношение равно $\frac{3}{20}S:\frac{161}{260}S=\frac{39}{161}$.

б) Так как у треугольников ABP и ALP общая высота, проведённая из вершины A, то $BP:PL=S_{ABP}:S_{ALP}=\frac{3}{20}:\frac{21}{260}=13:7$. Пусть $BP=13y$, $PL=7y$.

Пусть $\angle CBL=\gamma$. Тогда из треугольника BPM получаем, что $\cos\gamma=\frac{13y}{3x}$, а из треугольника BTL – что $\cos\gamma=\frac{4x}{20y}$. Приравнивая эти выражения для косинуса, находим, что $x=y\sqrt{\frac{65}{3}}$, откуда $\cos\gamma=\sqrt{\frac{13}{15}}$.

5. Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих условию $x^2+7xy+6y^2=15^{50}$.

Ответ. 4998.

Решение. Раскладывая левую и правую части уравнения на множители, получаем $(x+6y)(x+y)=5^{50}\cdot 3^{50}$. Поскольку каждый из множителей в левой части является целым числом, отсюда следует, что

$$\begin{cases} x+6y=5^k\cdot 3^l, \\ x+y=5^{50-k}\cdot 3^{50-l} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+6y=-5^k\cdot 3^l, \\ x+y=-5^{50-k}\cdot 3^{50-l} \end{cases}$$

где k и l – целые числа из отрезка $[0;50]$.

Найдём количество решений первой системы. Выражая из неё x и y, получаем

$$\begin{cases} x=6\cdot 5^{49-k}\cdot 3^{50-l}-5^{k-1}\cdot 3^l, \\ y=5^{k-1}\cdot 3^l-5^{49-k}\cdot 3^{50-l}. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение. Показатели в степенях тройки неотрицательны. Сумма показателей в степенях пятёрки равна 48, поэтому хотя бы один из них положителен, т.е соответствующий ему член является целым числом. Так как в левой части равенства также целое число, то и второй член в правой части равенства должен быть целым. Значит, для существования целочисленных решений необходимо и достаточно, чтобы $1\le k\le 49$, $0\le l\le 50$ – всего $49\cdot 51=2499$ вариантов.

Вторая система также имеет 2499 решений; итак, всего 4998 решений.

6. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2b(b + x + y) = 81, \\ y = \dfrac{5}{(x-a)^2 + 1} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

Ответ. $b \in [-14; 9)$.

Решение. Первое уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x+b)^2 + (y+b)^2 = 9^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 9 с центром $(-b; -b)$.

Рассмотрим функцию, заданную вторым уравнением при $a = 0$. В точке $x = 0$ она принимает максимальное значение, равно 5. При увеличении x по модулю функция убывает и стремится к нулю при $x \to \infty$. Если изменять a, то график сдвигается на $|a|$ единиц влево или вправо. При всевозможных $a \in \mathrm{R}$ графики этих функций заметают полосу $0 < y \leq 5$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы окружность, задаваемая первым уравнением, имела хотя бы одну общую точку с данной полосой, откуда $b \in [-14; 9)$.

1. Известно, что $\sin x = 2\cos y - \frac{5}{2}\sin y$, $\cos x = 2\sin y - \frac{5}{2}\cos y$. Найдите $\sin 2y$.

Ответ. $\sin 2y = \frac{37}{40}$.

Решение. Возводя оба равенства в квадрат и складывая их почленно, получаем $1 = 4 - 20\sin y\cos y + \frac{25}{4}$, откуда

$10\sin 2y = \frac{37}{4}$, $\sin 2y = \frac{37}{40}$.

2. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 242400 и таких, что $k^2 + 2k$ делится нацело на 303.
Ответ. 3200.
Решение. Разложив делимое и делитель на множители, получаем условие $k(k+2) \vdots (3\cdot 101)$. Значит, одно из чисел k или $(k+2)$ делится на 101. Рассмотрим два случая.

а) $k \vdots 101$, т.е. $k = 101p, p \in Z$. Тогда получаем $101p(101p+2) \vdots (3\cdot 101) \Leftrightarrow p(101p+2) \vdots 3$. Первый множитель делится на 3 при $p = 3q, q \in Z$, а второй – при $p = 3q+2, q \in Z$, откуда получаем, что $k = 303q$, $k = 303q + 202$, $q \in Z$.

б) $(k+2) \vdots 101$, т.е. $k = 101p + 99, p \in Z$. Тогда получаем $(101p+99)(101p+101) \vdots (3\cdot 101) \Leftrightarrow (101p+99)(p+1) \vdots 3$. Первый множитель делится на 3 при $p = 3q, q \in Z$, а второй – при $p = 3q+2, q \in Z$, откуда получаем, что $k = 303q + 99$, $k = 303q + 301$, $q \in Z$.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа, дающие остатки $0, 202, 99, 301$ при делении на 303, то есть подходят каждые 4 из 303 подряд идущих чисел. Так как $242400 = 303\cdot 800$, получаем $4\cdot 800 = 3200$ чисел.

3. Решите систему $\begin{cases} 3x \ge 2y + 16, \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 25 - 26x^2 - 26y^2 = 72xy. \end{cases}$

Ответ. $(6;1)$.

Решение. Преобразуем уравнение системы (добавляем к обеим частям $36x^2 + 36y^2$):

$$\left(x^2+y^2\right)^2 + 25 + 10x^2 + 10y^2 = 36x^2 + 36y^2 + 72xy \Leftrightarrow \left(x^2+y^2+5\right)^2 = (6x+6y)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2+5 = 6x+6y, \\ x^2+y^2+5 = -6x-6y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-3)^2+(y-3)^2 = 13, \\ (x+3)^2+(y+3)^2 = 13. \end{array}\right.$$

Получаем две окружности радиуса $\sqrt{13}$ с центрами в точках $(3;3)$ и $(-3;-3)$.

Неравенство системы задаёт полуплоскость. Рассмотрим взаимное расположение каждой из окружностей с прямой $y = \frac{3x}{2} - 8$, являющейся границей этой полуплоскости.

а) $\begin{cases} (x-3)^2+(y-3)^2 = 13, \\ y = \frac{3}{2}x - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + \left(\frac{3x}{2} - 11\right)^2 = 13, \\ y = \frac{3}{2}x - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{13}{4}x^2 - 39x + 117 = 0, \\ y = \frac{3}{2}x - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6, \\ y = 1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x+3)^2+(y+3)^2 = 13, \\ y = \frac{3}{2}x - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)^2 + \left(\frac{3x}{2} - 5\right)^2 = 13, \\ y = \frac{3}{2}x - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{13}{4}x^2 - 9x + 21 = 0, \\ y = \frac{3}{2}x - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$

При этом центры рассматриваемых окружностей – точки $(-3;-3)$ и $(3;3)$ – не лежат в полуплоскости, так как их координаты не удовлетворяют неравенству. Поэтому вторая окружность не имеет общих точек с полуплоскостью, а первая имеет единственную общую точку $(6;1)$.

4. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся такое число a, что система

$$\begin{cases} y = -b - x^2, \\ x^2 + y^2 + 8a^2 = 4 + 4a(x+y) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

Ответ. $b \le 2\sqrt{2} + \frac{1}{4}$.

Решение. Второе уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x-2a)^2 + (y-2a)^2 = 2^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 2 с центром $(2a; 2a)$. При всевозможных $a \in \mathrm{R}$ графики этих функций заметают полосу $x - 2\sqrt{2} \le y \le x + 2\sqrt{2}$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы парабола, задаваемая первым уравнением, имела хотя бы одну общую точку с данной полосой.

Найдём значение параметра b, при котором парабола касается нижней границы полосы, т.е. прямой $y = x - 2\sqrt{2}$. Это означает, что уравнение $-b - x^2 = x - 2\sqrt{2}$ имеет ровно одно решение, откуда $b = 2\sqrt{2} + \frac{1}{4}$. При этом ордината вершины параболы $y_0 = -2\sqrt{2} - \frac{1}{4}$. Подходят все значения b, при которых $y_в \ge y_0$, т.е. $-b \ge -2\sqrt{2} - \frac{1}{4}$, $b \le 2\sqrt{2} + \frac{1}{4}$.

5. Дан правильный 20-угольник M. Найдите количество четвёрок вершин этого 20-угольника, являющихся вершинами трапеций.

Ответ. 720.

Решение. Впишем данный многоугольник $K_1K_2...K_{20}$ в окружность. Каждая трапеция определяется парой параллельных хорд с концами в точках $K_1, ..., K_{20}$.

Рассмотрим хорду, соединяющую две соседние вершины многоугольника, например, K_6K_7. Существуют ещё 9 хорд, параллельных ей (K_5K_8 и т.д.), т.е. получается набор из 10 параллельных друг другу хорд. Из них можно образовать $C_{10}^2 = 45$ пар параллельных отрезков.

Аналогичные наборы мы получим, если будем рассматривать все хорды, параллельные K_1K_2, … , $K_{10}K_{11}$ – всего 10 таких наборов.

Теперь возьмём хорду, соединяющую вершины, находящиеся через одну друг от друга, например, K_6K_8. Существуют ещё 8 хорд, параллельных ей (K_5K_9 и т.д.), т.е. получается набор из 9 параллельных друг другу хорд. Из них можно образовать $C_9^2 = 36$ пар параллельных отрезков. Этих наборов также 10.

В итоге получаем $10 \cdot 45 + 10 \cdot 36 = 810$ четырёхугольников. При таком способе подсчёта прямоугольники оказались учтены дважды. Заметим, что обе диагонали вписанного в окружность прямоугольника являются диаметрами, всего диаметров с вершинами в данных точках 10, и таким образом, выходит $C_{10}^2 = 45$ прямоугольников. Вычитая удвоенное количество прямоугольников, получаем $810 - 90 = 720$ четырёхугольников, имеющих хотя бы одну пару параллельных сторон.

6. В углы A и B треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Данные окружности касаются стороны AB в точках K_1, K_2 и K соответственно, при этом $AK_1 = 4$, $BK_2 = 6$, и $AB = 16$.

а) Найдите длину отрезка AK.

б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны AC в точке K_3. Найдите угол CAB, если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3.

Ответ. а) $AK = \frac{32}{5}$, б) $\angle CAB = 2\arcsin\frac{3}{5} = \arccos\frac{7}{25}$.

Решение. а) Прямые AO_1 и BO_2 являются биссектрисами углов A и B треугольника, поэтому они пересекаются в точке O – центре вписанной окружности. Обозначим радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2 через r, а радиус вписанной окружности через R. Треугольники OKB и O_2K_2B подобны, коэффициент подобия равен $\frac{R}{r}$, поэтому $BK = \frac{6R}{r}$. Аналогично $AK = \frac{4R}{r}$, откуда $\frac{10R}{r} = 16$, $AK = \frac{32}{5}$.

б) Из условия следует, что $O_1O = O_1K_1 = r$. Опустим из точки O_1 перпендикуляр O_1H на отрезок OK. Тогда $OH = R - r = \frac{3}{5}r$, $\angle OAB = \angle OO_1H = \arcsin\frac{OH}{OO_1} = \arcsin\frac{3}{5}$. Значит, $\angle CAB = 2\arcsin\frac{3}{5} = \arccos\frac{7}{25}$.

1. Известно, что $\sin y=\frac{3}{2}\sin x+\frac{2}{3}\cos x$, $\cos y=\frac{2}{3}\sin x+\frac{3}{2}\cos x$. Найдите $\sin 2x$.

Ответ. $\sin 2x=-\frac{61}{72}$.

Решение. Возводя оба равенства в квадрат и складывая их почленно, получаем $1=\frac{9}{4}+4\sin x\cos x+\frac{4}{9}$, откуда $-2\sin 2x=\frac{61}{36}$, $\sin 2x=-\frac{61}{72}$.

2. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 353500 и таких, что k^2+k делится нацело на 505.
Ответ. 2800.
Решение. Разложив делимое и делитель на множители, получаем условие $k(k+1)\vdots(5\cdot 101)$. Значит, одно из чисел k или $(k+1)$ делится на 101. Рассмотрим два случая.

а) $k\vdots 101$, т.е. $k=101p, p\in Z$. Тогда получаем $101p(101p+1)\vdots(5\cdot 101)\Leftrightarrow p(101p+1)\vdots 5$. Первый множитель делится на 5 при $p=5q, q\in Z$, а второй – при $p=5q+4, q\in Z$, откуда получаем, что $k=505q$, $k=505q+404$, $q\in Z$.

б) $(k+1)\vdots 101$, т.е. $k=101p+100, p\in Z$. Тогда получаем $(101p+100)(101p+101)\vdots(5\cdot 101)\Leftrightarrow(101p+100)(p+1)\vdots 5$. Первый множитель делится на 5 при $p=5q, q\in Z$, а второй – при $p=5q+4, q\in Z$, откуда получаем, что $k=505q+100$, $k=505q+504$, $q\in Z$.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа, дающие остатки $0, 404, 100, 504$ при делении на 505, то есть подходят каждые 4 из 505 подряд идущих чисел. Так как $353500=505\cdot 700$, получаем $4\cdot 700=2800$ чисел.

3. Решите систему $\begin{cases}2x\ge 14+y,\\ x^4+2x^2y^2+y^4+144-40x^2-40y^2=128xy.\end{cases}$

Ответ. $(8;2)$.

Решение. Преобразуем уравнение системы (добавляем к обеим частям $64x^2+64y^2$):

$$\left(x^2+y^2\right)^2+144+24x^2+24y^2=64x^2+64y^2+128xy\Leftrightarrow\left(x^2+y^2+12\right)^2=(8x+8y)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+y^2+12=8x+8y,\\ x^2+y^2+12=-8x-8y\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(x-4)^2+(y-4)^2=20,\\ (x+4)^2+(y+4)^2=20.\end{array}\right.$$

Получаем две окружности радиуса $2\sqrt{5}$ с центрами в точках $(4;4)$ и $(-4;-4)$.

Неравенство системы задаёт полуплоскость. Рассмотрим взаимное расположение каждой из окружностей с прямой $y=2x-14$, являющейся границей этой полуплоскости.

а) $\begin{cases}(x-4)^2+(y-4)^2=20,\\ y=2x-14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-4)^2+(2x-18)^2=20,\\ y=2x-14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x^2-80x+320=0,\\ y=2x-14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=8,\\ y=2.\end{cases}$

б) $\begin{cases}(x+4)^2+(y+4)^2=20,\\ y=2x-14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+4)^2+(2x-10)^2=20,\\ y=2x-14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x^2-32x+96=0,\\ y=2x-14\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing.$

При этом центры рассматриваемых окружностей – точки $(4;4)$ и $(-4;-4)$ – не лежат в полуплоскости, так как их координаты не удовлетворяют неравенству. Поэтому вторая окружность не имеет общих точек с полуплоскостью, а первая имеет единственную общую точку $(8;2)$.

4. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся такое число b, что система

$$\begin{cases}y=x^2-a,\\ x^2+y^2+8b^2=4b(y-x)+1\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

Ответ. $a\ge-\sqrt{2}-\frac{1}{4}$.

Решение. Второе уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x+2b)^2+(y-2b)^2=1^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 1 с центром $(-2b;2b)$. При всевозможных $b\in\mathrm{R}$ графики этих функций заметают полосу $-x-\sqrt{2}\le y\le -x+\sqrt{2}$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы парабола, задаваемая первым уравнением, имела хотя бы одну общую точку с данной полосой.

Найдём значение параметра a, при котором парабола касается верхней границы полосы, т.е. прямой $y=-x+\sqrt{2}$. Это означает, что уравнение $x^2-a=-x+\sqrt{2}$ имеет ровно одно решение, откуда $a=-\sqrt{2}-\dfrac{1}{4}$.

При этом ордината вершины параболы $y_0=\sqrt{2}+\dfrac{1}{4}$. Подходят все значения a, при которых $y_\text{в}\le y_0$, т.е. $-a\le\sqrt{2}+\dfrac{1}{4}$, $a\ge-\sqrt{2}-\dfrac{1}{4}$.

5. Дан правильный 16-угольник M. Найдите количество четвёрок вершин этого 16-угольника, являющихся вершинами трапеций.

Ответ. 336.

Решение. Впишем данный многоугольник $K_1K_2...K_{16}$ в окружность. Каждая трапеция определяется парой параллельных хорд с концами в точках $K_1,\dots,K_{16}$.

Рассмотрим хорду, соединяющую две соседние вершины многоугольника, например, K_6K_7. Существуют ещё 7 хорд, параллельных ей (K_5K_8 и т.д.), т.е. получается набор из 8 параллельных друг другу хорд. Из них можно образовать $C_8^2=28$ пар параллельных отрезков.

Аналогичные наборы мы получим, если будем рассматривать все хорды, параллельные K_1K_2, … , K_8K_9 – всего 8 таких наборов.

Теперь возьмём хорду, соединяющую вершины, находящиеся через одну друг от друга, например, K_6K_8. Существуют ещё 6 хорд, параллельных ей (K_5K_9 и т.д.), т.е. получается набор из 7 параллельных друг другу хорд. Из них можно образовать $C_7^2=21$ пар параллельных отрезков. Этих наборов также 8.

В итоге получаем $8\cdot 28+8\cdot 21=392$ четырёхугольников. При таком способе подсчёта прямоугольники оказались учтены дважды. Заметим, что обе диагонали вписанного в окружность прямоугольника являются диаметрами, всего диаметров с вершинами в данных точках 8, и таким образом, выходит $C_8^2=28$ прямоугольников. Вычитая удвоенное количество прямоугольников, получаем $392-56=336$ четырёхугольников, имеющих хотя бы одну пару параллельных сторон.

6. В углы B и C треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Данные окружности касаются стороны BC в точках K_1, K_2 и K соответственно, при этом $BK_1=4$, $CK_2=8$, и $BC=18$.

а) Найдите длину отрезка CK.

б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны AB в точке K_3. Найдите угол ABC, если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3.

Ответ. а) $CK=12$, б) $\angle ABC=60^\circ$.

Решение. а) Прямые CO_2 и BO_1 являются биссектрисами углов C и B треугольника, поэтому они пересекаются в точке O – центре вписанной окружности. Обозначим радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2 через r, а радиус вписанной окружности через R. Треугольники OKB и O_1K_1B подобны, коэффициент подобия равен $\dfrac{R}{r}$, поэтому $BK=\dfrac{4R}{r}$. Аналогично $CK=\dfrac{8R}{r}$, откуда $\dfrac{12R}{r}=18$, $CK=12$.

б) Из условия следует, что $O_1O=O_1K_1=r$. Опустим из точки O_1 перпендикуляр O_1H на отрезок OK. Тогда $OH=R-r=\dfrac{1}{2}r$, $\angle OBC=\angle OO_1H=\arcsin\dfrac{OH}{OO_1}=\arcsin\dfrac{1}{2}=30^\circ$. Значит, $\angle ABC=2\cdot 30^\circ=60^\circ$.

1. Известно, что $\sin y = 2\cos x + \frac{5}{2}\sin x$, $\cos y = 2\sin x + \frac{5}{2}\cos x$. Найдите $\sin 2x$.

Ответ. $\sin 2x = -\frac{37}{40}$.

Решение. Возводя оба равенства в квадрат и складывая их почленно, получаем $1 = 4 + 20\sin x\cos x + \frac{25}{4}$, откуда $-10\sin 2x = \frac{37}{4}$, $\sin 2x = -\frac{37}{40}$.

2. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 333300 и таких, что $k^2 - 2k$ делится нацело на 303.
Ответ. 4400.
Решение. Разложив делимое и делитель на множители, получаем условие $k(k-2) \vdots (3\cdot 101)$. Значит, одно из чисел k или $(k-2)$ делится на 101. Рассмотрим два случая.

а) $k \vdots 101$, т.е. $k = 101p,\ p \in Z$. Тогда получаем $101p(101p-2) \vdots (3\cdot 101) \Leftrightarrow p(101p-2) \vdots 3$. Первый множитель делится на 3 при $p = 3q, q \in Z$, а второй – при $p = 3q+1, q \in Z$, откуда получаем, что $k = 303q$, $k = 303q + 101$, $q \in Z$.

б) $(k-2) \vdots 101$, т.е. $k = 101p + 2,\ p \in Z$. Тогда получаем $(101p+2)101p \vdots (3\cdot 101) \Leftrightarrow (101p+2)p \vdots 3$. Первый множитель делится на 3 при $p = 3q+2, q \in Z$, а второй – при $p = 3q, q \in Z$, откуда получаем, что $k = 303q + 204$, $k = 303q + 2$, $q \in Z$.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа, дающие остатки $0, 101, 204, 2$ при делении на 303, то есть подходят каждые 4 из 303 подряд идущих чисел. Так как $333300 = 303\cdot 1100$, получаем $4\cdot 1100 = 4400$ чисел.

3. Решите систему $\begin{cases} 2x + y + 8 \le 0, \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 9 - 10x^2 - 10y^2 = 8xy. \end{cases}$

Ответ. $(-3; -2)$.

Решение. Преобразуем уравнение системы (добавляем к обеим частям $4x^2 + 4y^2$):

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 + 9 - 6x^2 - 6y^2 = 4x^2 + 4y^2 + 8xy \Leftrightarrow \left(x^2 + y^2 - 3\right)^2 = (2x+2y)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 3 = 2x + 2y, \\ x^2 + y^2 - 3 = -2x - 2y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5, \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 = 5. \end{array}\right.$$

Получаем две окружности радиуса $\sqrt{5}$ с центрами в точках $(1;1)$ и $(-1;-1)$.

Неравенство системы задаёт полуплоскость. Рассмотрим взаимное расположение каждой из окружностей с прямой $y = -2x - 8$, являющейся границей этой полуплоскости.

а) $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5, \\ y = -2x - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (-2x-9)^2 = 5, \\ y = -2x - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 34x + 82 = 0, \\ y = -2x - 8. \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$.

б) $\begin{cases} (x+1`)^2 + (y+1)^2 = 5, \\ y = -2x - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + (-2x-7)^2 = 5, \\ y = -2x - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 30x + 45 = 0, \\ y = -2x - 8. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3, \\ y = -2 \end{cases}.$

При этом центры рассматриваемых окружностей – точки $(1;1)$ и $(-1;-1)$ – не лежат в полуплоскости, так как их координаты не удовлетворяют неравенству. Поэтому первая окружность не имеет общих точек с полуплоскостью, а вторая имеет единственную общую точку $(-3;-2)$.

4. Найдите все значения параметра b, для каждого из которых найдётся такое число a, что система

$$\begin{cases} y = b - x^2, \\ x^2 + y^2 + 2a^2 = 4 - 2a(x+y) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

Ответ. $b \ge -2\sqrt{2} - \frac{1}{4}$.

Решение. Второе уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x+a)^2+(y+a)^2=2^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 2 с центром $(-a;-a)$. При всевозможных $a\in\mathbb{R}$ графики этих функций заметают полосу $x-2\sqrt{2}\le y\le x+2\sqrt{2}$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы парабола, задаваемая первым уравнением, имела хотя бы одну общую точку с данной полосой.

Найдём значение параметра b, при котором парабола касается нижней границы полосы, т.е. прямой $y=x-2\sqrt{2}$. Это означает, что уравнение $b-x^2=x-2\sqrt{2}$ имеет ровно одно решение, откуда $b=-2\sqrt{2}-\frac{1}{4}$.

При этом ордината вершины параболы $y_0=-2\sqrt{2}-\frac{1}{4}$. Подходят все значения b, при которых $y_{\text{в}}\ge y_0$, т.е. $b\ge -2\sqrt{2}-\frac{1}{4}$.

5. Дан правильный 22-угольник M. Найдите количество четвёрок вершин этого 22-угольника, являющихся вершинами трапеций.

Ответ. 990.

Решение. Впишем данный многоугольник $K_1K_2...K_{22}$ в окружность. Каждая трапеция сторон определяется парой параллельных хорд с концами в точках $K_1,\dots,K_{22}$.

Рассмотрим хорду, соединяющую две соседние вершины многоугольника, например, K_6K_7. Существуют ещё 10 хорд, параллельных ей (K_5K_8 и т.д.), т.е. получается набор из 11 параллельных друг другу хорд. Из них можно образовать $C_{11}^2=55$ пар параллельных отрезков.

Аналогичные наборы мы получим, если будем рассматривать все хорды, параллельные K_1K_2, … , $K_{11}K_{12}$ – всего 11 таких наборов.

Теперь возьмём хорду, соединяющую вершины, находящиеся через одну друг от друга, например, K_6K_8. Существуют ещё 9 хорд, параллельных ей (K_5K_9 и т.д.), т.е. получается набор из 10 параллельных друг другу хорд. Из них можно образовать $C_{10}^2=45$ пар параллельных отрезков. Этих наборов также 11.

В итоге получаем $11\cdot 55+11\cdot 45=1100$ четырёхугольников. При таком способе подсчёта прямоугольники оказались учтены дважды. Заметим, что обе диагонали вписанного в окружность прямоугольника являются диаметрами, всего диаметров с вершинами в данных точках 11, и таким образом, выходит $C_{11}^2=55$ прямоугольников. Вычитая удвоенное количество прямоугольников, получаем $1100-110=990$ четырёхугольников, имеющих хотя бы одну пару параллельных сторон.

6. В углы C и B треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Данные окружности касаются стороны BC в точках K_1, K_2 и K соответственно, при этом $CK_1=3$, $BK_2=7$, и $BC=16$.

а) Найдите длину отрезка CK.

б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны AC в точке K_3. Найдите угол ACB, если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3.

Ответ. а) $CK=\frac{24}{5}$, б) $\angle ACB=2\arcsin\frac{3}{5}=\arccos\frac{7}{25}$.

Решение. а) Прямые CO_1 и BO_2 являются биссектрисами углов C и B треугольника, поэтому они пересекаются в точке O – центре вписанной окружности. Обозначим радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2 через r, а радиус вписанной окружности через R. Треугольники OKB и O_2K_2B подобны, коэффициент подобия равен $\frac{R}{r}$, поэтому $BK=\frac{7R}{r}$. Аналогично $CK=\frac{3R}{r}$, откуда $\frac{10R}{r}=16$, $CK=\frac{24}{5}$.

б) Из условия следует, что $O_1O=O_1K_1=r$. Опустим из точки O_1 перпендикуляр O_1H на отрезок OK. Тогда $OH=R-r=\frac{3}{5}r$, $\angle OCB=\angle OO_1H=\arcsin\frac{OH}{OO_1}=\arcsin\frac{3}{5}$. Значит, $\angle ACB=2\arcsin\frac{3}{5}=\arccos\frac{7}{25}$.

1. Известно, что $\sin x=\frac{3}{2}\sin y-\frac{2}{3}\cos y$, $\cos x=\frac{3}{2}\cos y-\frac{2}{3}\sin y$. Найдите $\sin 2y$.

Ответ. $\sin 2y=\frac{61}{72}$.

Решение. Возводя оба равенства в квадрат и складывая их почленно, получаем $1=\frac{9}{4}-4\sin y\cos y+\frac{4}{9}$, откуда $2\sin 2y=\frac{61}{36}$, $\sin 2y=\frac{61}{72}$.

2. Найдите количество натуральных чисел k, не превосходящих 454500 и таких, что k^2-k делится нацело на 505.
Ответ. 3600.
Решение. Разложив делимое и делитель на множители, получаем условие $k(k-1)\vdots(5\cdot 101)$. Значит, одно из чисел k или $(k-1)$ делится на 101. Рассмотрим два случая.

а) $k\vdots 101$, т.е. $k=101p,\ p\in\mathbb{Z}$. Тогда получаем $101p(101p-1)\vdots(5\cdot 101)\Leftrightarrow p(101p-1)\vdots 5$. Первый множитель делится на 5 при $p=5q,\ q\in\mathbb{Z}$, а второй – при $p=5q+1,\ q\in\mathbb{Z}$, откуда получаем, что $k=505q$, $k=505q+101$, $q\in\mathbb{Z}$.

б) $(k-1)\vdots 101$, т.е. $k=101p+1,\ p\in\mathbb{Z}$. Тогда получаем $(101p+1)101p\vdots(5\cdot 101)\Leftrightarrow(101p+1)p\vdots 5$. Первый множитель делится на 5 при $p=5q+4,\ q\in\mathbb{Z}$, а второй – при $p=5q,\ q\in\mathbb{Z}$, откуда получаем, что $k=505q+405$, $k=505q+1$, $q\in\mathbb{Z}$.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа, дающие остатки $0, 101, 405, 1$ при делении на 505, то есть подходят каждые 4 из 505 подряд идущих чисел. Так как $454500=505\cdot 900$, получаем $4\cdot 900=3600$ чисел.

3. Решите систему $\begin{cases}x+3y+14\le 0,\\ x^4+2x^2y^2+y^4+64-20x^2-20y^2=8xy.\end{cases}$

Ответ. $(-2;-4)$.

Решение. Преобразуем уравнение системы (добавляем к обеим частям $4x^2+4y^2$):

$$\left(x^2+y^2\right)^2+64-16x^2-16y^2=4x^2+4y^2+8xy\Leftrightarrow\left(x^2+y^2-8\right)^2=(2x+2y)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+y^2-8=2x+2y,\\ x^2+y^2-8=-2x-2y\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(x-1)^2+(y-1)^2=10,\\ (x+1)^2+(y+1)^2=10.\end{array}\right.$$

Получаем две окружности радиуса $\sqrt{10}$ с центрами в точках $(1;1)$ и $(-1;-1)$.

Неравенство системы задаёт полуплоскость. Рассмотрим взаимное расположение каждой из окружностей с прямой $x=-3y-14$, являющейся границей этой полуплоскости.

а) $\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=10,\\ x=-3y-14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(-3y-15)^2+(y-1)^2=10,\\ x=-3y-14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10y^2+88x+216=0,\\ x=-3y-14\end{cases}\Leftrightarrow\varnothing$

б) $\begin{cases}(x+1)^2+(y+1)^2=10,\\ x=-3y-14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(-3y-13)^2+(y+1)^2=10,\\ x=-3y-14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10y^2+80y+160=0,\\ x=-3y-14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-4,\\ x=-2.\end{cases}$

При этом центры рассматриваемых окружностей – точки $(1;1)$ и $(-1;-1)$ – не лежат в полуплоскости, так как их координаты не удовлетворяют неравенству. Поэтому первая окружность не имеет общих точек с полуплоскостью, а вторая имеет единственную общую точку $(-2;-4)$.

4. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдётся такое число b, что система

$$\begin{cases}y=x^2+a,\\ x^2+y^2+2b^2=2b(x-y)+1\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x;y)$.

Ответ. $a\le\sqrt{2}+\frac{1}{4}$.

Решение. Второе уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x-b)^2+(y+b)^2=1^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 1 с центром $(b;-b)$. При всевозможных $b\in\mathbb{R}$ графики этих функций заметают полосу $-x-\sqrt{2}\le y\le -x+\sqrt{2}$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы парабола, задаваемая первым уравнением, имела хотя бы одну общую точку с данной полосой.

Найдём значение параметра a, при котором парабола касается верхней границы полосы, т.е. прямой $y=-x+\sqrt{2}$. Это означает, что уравнение $x^2+a=-x+\sqrt{2}$ имеет ровно одно решение, откуда $a=\sqrt{2}+\frac{1}{4}$.

При этом ордината вершины параболы $y_0=\sqrt{2}+\frac{1}{4}$. Подходят все значения a, при которых $y_в\le y_0$, т.е. $a\le\sqrt{2}+\frac{1}{4}$.

5. Дан правильный 18-угольник M. Найдите количество четвёрок вершин этого 18-угольника, являющихся вершинами трапеций.

Ответ. 504.

Решение. Впишем данный многоугольник $K_1K_2...K_{18}$ в окружность. Каждая трапеция определяется парой параллельных хорд с концами в точках $K_1,\dots,K_{18}$.

Рассмотрим хорду, соединяющую две соседние вершины многоугольника, например, K_6K_7. Существуют ещё 8 хорд, параллельных ей (K_5K_8 и т.д.), т.е. получается набор из 9 параллельных друг другу хорд. Из них можно образовать $C_9^2=36$ пар параллельных отрезков.

Аналогичные наборы мы получим, если будем рассматривать все хорды, параллельные K_1K_2, … , K_9K_{10} – всего 9 таких наборов.

Теперь возьмём хорду, соединяющую вершины, находящиеся через одну друг от друга, например, K_6K_8. Существуют ещё 7 хорд, параллельных ей (K_5K_9 и т.д.), т.е. получается набор из 8 параллельных друг другу хорд. Из них можно образовать $C_8^2=28$ пар параллельных отрезков. Этих наборов также 9.

В итоге получаем $9\cdot 36+9\cdot 28=576$ четырёхугольников. При таком способе подсчёта прямоугольники оказались учтены дважды. Заметим, что обе диагонали вписанного в окружность прямоугольника являются диаметрами, всего диаметров с вершинами в данных точках 8, и таким образом, выходит $C_9^2=36$ прямоугольников. Вычитая удвоенное количество прямоугольников, получаем $576-72=504$ четырёхугольников, имеющих хотя бы одну пару параллельных сторон.

6. В углы C и A треугольника ABC вписаны соответственно окружности с центрами O_1 и O_2 равного радиуса, точка O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Данные окружности касаются стороны AC в точках K_1, K_2 и K соответственно, при этом $CK_1=6$, $AK_2=8$, и $AC=21$.

а) Найдите длину отрезка CK.

б) Пусть окружность с центром O_1 касается стороны BC в точке K_3. Найдите угол BCA, если известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника OK_1K_3.

Ответ. а) $CK=9$, б) $\angle ACB=60^\circ$.

Решение. а) Прямые CO_1 и AO_2 являются биссектрисами углов C и A треугольника, поэтому они пересекаются в точке O – центре вписанной окружности. Обозначим радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2 через r, а радиус вписанной окружности через R. Треугольники OKA и O_2K_2A подобны, коэффициент подобия равен $\frac{R}{r}$, поэтому $AK=\frac{8R}{r}$. Аналогично $CK=\frac{6R}{r}$, откуда $\frac{14R}{r}=21$, $CK=9$.

б) Из условия следует, что $O_1O=O_1K_1=r$. Опустим из точки O_1 перпендикуляр O_1H на отрезок OK. Тогда $OH=R-r=\frac{1}{2}r$, $\angle OCB=\angle OO_1H=\arcsin\frac{OH}{OO_1}=\arcsin\frac{1}{2}=30^\circ$. Значит, $\angle ACB=2\cdot 30^\circ=60^\circ$.