

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

ШИФР \_\_\_\_\_.

заполняется ответственным секретарём

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2y} = 3y - x, \\ \frac{81}{4}y^2 + x^3 = 2x + 1. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\log_{\operatorname{tg} x} (\operatorname{ctg} x - 2) + \log_{(\operatorname{ctg} x - 2)} \sqrt{\operatorname{tg} x} = \frac{3}{2}.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{10 - 2|x|}{|x^2 + 9x + 11| - 3} \leq 1.$$

4. В параллелограмме  $ABCD$  окружность радиуса  $\frac{1}{4}$  с центром на отрезке  $CD$  проходит через точку  $D$  и касается отрезка  $BC$  в точке  $E$  такой, что угол  $BED$  равен  $\operatorname{arctg} \frac{4}{3}$ . Найдите высоту параллелограмма  $DF$  и длину отрезка  $CD$ . Найдите площадь параллелограмма, если  $AB = BE$ .

5. Найдите все значения параметра  $b$ , для каждого из которых существует число  $\alpha$ , такое, что уравнение

$$x^2 + (\sin \alpha + 3 \cos \alpha)x + b = 0$$

имеет действительное решение.

6. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $ABC$  равна 1, боковое ребро равно 2. Сфера с центром  $O$  на прямой  $SA$  касается рёбер  $SB$ ,  $SC$  и  $BC$ . Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей  $BSC$  и  $ABC$ , а также радиус сферы.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

ШИФР \_\_\_\_\_.

заполняется ответственным секретарём

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - \frac{2}{3}y} = y - x, \\ \frac{9}{4}y^2 + x^3 = 2x + 1. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\log_{\operatorname{tg} x} (2 - \operatorname{ctg} x) + 2 \log_{(2 - \operatorname{ctg} x)} \sqrt{\operatorname{tg} x} = \frac{5}{2}.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{20 - 4|x|}{|x^2 + 11x + 21| - 3} \leq 1.$$

4. В параллелограмме  $ABCD$  окружность радиуса 1 с центром на отрезке  $BC$  проходит через точку  $C$  и касается отрезка  $AB$  в точке  $E$  такой, что угол  $AEC$  равен  $\operatorname{arctg} 2$ . Найдите высоту параллелограмма  $CF$  и длину отрезка  $BC$ . Найдите площадь параллелограмма, если  $AD = AE$ .

5. Найдите все значения параметра  $b$ , для каждого из которых существует число  $\alpha$ , такое, что уравнение

$$x^2 + (2 \sin \alpha - \cos \alpha)x - b = 0$$

имеет действительное решение.

6. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $ABC$  равна 2, боковое ребро равно 3. Сфера с центром  $O$  на прямой  $SB$  касается рёбер  $SA$ ,  $SC$  и  $AC$ . Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей  $ASC$  и  $ABC$ , а также радиус сферы.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

ШИФР \_\_\_\_\_.

заполняется ответственным секретарём

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y^2 - 2x} = 3x - y, \\ \frac{81}{4}x^2 + y^3 = 2y + 1. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\log_{\operatorname{ctg} x} (\operatorname{tg} x - 2) + \log_{(\operatorname{tg} x - 2)} \sqrt{\operatorname{ctg} x} = \frac{3}{2}.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{8 - 2|x|}{|x^2 + 7x + 3| - 3} \leq 1.$$

4. В параллелограмме  $ABCD$  окружность радиуса  $\frac{1}{2}$  с центром на отрезке  $AB$  проходит через точку  $B$  и касается отрезка  $AD$  в точке  $E$  такой, что угол  $BED$  равен  $\operatorname{arctg} \frac{3}{2}$ . Найдите высоту параллелограмма  $BF$  и длину отрезка  $AB$ . Найдите площадь параллелограмма, если  $CD = DE$ .

5. Найдите все значения параметра  $b$ , для каждого из которых существует число  $\alpha$ , такое, что уравнение

$$x^2 + (\cos \alpha - 4 \sin \alpha)x + b = 0$$

имеет действительное решение.

6. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $ABC$  равна 1, боковое ребро равно 3. Сфера с центром  $O$  на прямой  $SA$  касается рёбер  $SB$ ,  $SC$  и  $BC$ . Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей  $BSC$  и  $ABC$ , а также радиус сферы.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

ШИФР \_\_\_\_\_.

заполняется ответственным секретарём

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y^2 - \frac{2}{3}x} = x - y, \\ \frac{9}{4}x^2 + y^3 = 2y + 1. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\log_{\operatorname{ctg} x} (2 - \operatorname{tg} x) + 2 \log_{(2 - \operatorname{tg} x)} \sqrt{\operatorname{ctg} x} = \frac{5}{2}.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{6 - 2|x|}{|x^2 + 5x - 3| - 3} \leq 1.$$

4. В параллелограмме  $ABCD$  окружность радиуса 2 с центром на отрезке  $AD$  проходит через точку  $A$  и касается отрезка  $CD$  в точке  $E$  такой, что угол  $AEC$  равен  $\operatorname{arctg} 3$ . Найдите высоту параллелограмма  $AF$  и длину отрезка  $AD$ . Найдите площадь параллелограмма, если  $BC = CE$ .

5. Найдите все значения параметра  $b$ , для каждого из которых существует число  $\alpha$ , такое, что уравнение

$$x^2 + (3 \cos \alpha + 2 \sin \alpha)x - b = 0$$

имеет действительное решение.

6. В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  сторона основания  $ABC$  равна 2, боковое ребро равно 5. Сфера с центром  $O$  на прямой  $SC$  касается рёбер  $SA$ ,  $SB$  и  $AB$ . Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей  $ASB$  и  $ABC$ , а также радиус сферы.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

ШИФР \_\_\_\_\_.

заполняется ответственным секретарём

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y^2 - \frac{2x}{y}} = x - y, \\ x^2 + \frac{2}{y^2} = y^2 + 1. \end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\frac{2}{\log_{(x-1)}\left(\frac{5}{2} - x\right)} \leq 1.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{8 \operatorname{tg} x + 22 \operatorname{ctg} x} = -\sqrt{15} (\sin x + \cos x).$$

4. В треугольнике  $ABC$  окружность радиуса  $\frac{13}{3}$  с центром на отрезке  $BC$  проходит через точку  $B$  и касается отрезка  $AC$  в точке  $D$  такой, что угол  $ADB$  равен  $\operatorname{arctg} \frac{3}{2}$ . Найдите высоту  $BF$  треугольника  $ABC$  и длину отрезка  $CD$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если длины отрезков  $AB$  и  $CD$  равны.

5. Найдите все значения параметра  $b$ , при которых система уравнений

$$\begin{cases} y = |b - x^2|, \\ y = a(x - b) \end{cases}$$

имеет решение при любом значении параметра  $a$ .

6. В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания  $ABCD$  равна 1, боковое ребро равно 2. Сфера с центром  $O$  на плоскости  $CDS$  касается рёбер  $SA$ ,  $SB$  и  $AB$ . Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей  $ABC$  и  $ADS$ , а также радиус сферы.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

ШИФР \_\_\_\_\_.

заполняется ответственным секретарём

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{4y^2 + \frac{x}{y}} = -x - 2y, \\ x^2 + \frac{1}{2y^2} = 4y^2 + 1. \end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\frac{2}{\log_{\left(x-\frac{5}{8}\right)}(2-x)} \leq 1.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{4 \operatorname{tg} x - 14 \operatorname{ctg} x} = \sqrt{5} (\sin x - \cos x).$$

4. В треугольнике  $ABC$  окружность радиуса  $\frac{13}{2\sqrt{3}}$  с центром на отрезке  $AB$  проходит через точку  $A$  и касается отрезка  $BC$  в точке  $D$  такой, что угол  $ADC$  равен  $\arcsin \frac{3}{\sqrt{13}}$ . Найдите высоту  $AF$  треугольника  $ABC$  и длину отрезка  $BD$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если длины отрезков  $AC$  и  $BD$  равны.

5. Найдите все значения параметра  $b$ , при которых система уравнений

$$\begin{cases} x = |b + y^2|, \\ y = a(x - b^2) \end{cases}$$

имеет решение при любом значении параметра  $a$ .

6. В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания  $ABCD$  равна 1, боковое ребро равно 3. Сфера с центром  $O$  на плоскости  $ADS$  касается рёбер  $SB$ ,  $SC$  и  $BC$ . Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей  $ABC$  и  $ABS$ , а также радиус сферы.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

ШИФР \_\_\_\_\_.

заполняется ответственным секретарём

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y^2 - \frac{32x}{y}} = 4x - y, \\ 4x^2 + \frac{8}{y^2} = \frac{y^2}{4} + 1. \end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\frac{2}{\log_{(x+\frac{1}{4})}(1-x)} \leq 1.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{7 \operatorname{tg} x + 33 \operatorname{ctg} x} = 2\sqrt{5} (\sin x + \cos x).$$

4. В треугольнике  $ABC$  окружность радиуса  $\frac{13}{2}$  с центром на отрезке  $AC$  проходит через точку  $C$  и касается отрезка  $AB$  в точке  $D$  такой, что угол  $BDC$  равен  $\arccos \frac{2}{\sqrt{13}}$ . Найдите высоту  $CF$  треугольника  $ABC$  и длину отрезка  $AD$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если длины отрезков  $AD$  и  $BC$  равны.

5. Найдите все значения параметра  $b$ , при которых система уравнений

$$\begin{cases} y = -|b + x^2|, \\ y = a(x + b) \end{cases}$$

имеет решение при любом значении параметра  $a$ .

6. В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания  $ABCD$  равна 2, боковое ребро равно 5. Сфера с центром  $O$  на плоскости  $ABS$  касается рёбер  $SC$ ,  $SD$  и  $CD$ . Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей  $ABC$  и  $BCS$ , а также радиус сферы.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

ШИФР \_\_\_\_\_.

заполняется ответственным секретарём

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y^2 + \frac{x}{2y}} = -x - y, \\ 4x^2 + \frac{1}{2y^2} = 4y^2 + 1. \end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\frac{2}{\log_{\left(x + \frac{5}{8}\right)}\left(\frac{1}{2} - x\right)} \leq 1.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{2 \operatorname{tg} x - 12 \operatorname{ctg} x} = \sqrt{5} (\cos x - \sin x).$$

4. В треугольнике  $ABC$  окружность радиуса  $\frac{13}{3\sqrt{3}}$  с центром на отрезке  $AC$  проходит через точку  $A$  и касается отрезка  $BC$  в точке  $D$  такой, что угол  $ADB$  равен  $\arcsin \frac{3}{\sqrt{13}}$ . Найдите высоту  $AF$  треугольника  $ABC$  и длину отрезка  $CD$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если длины отрезков  $AB$  и  $CD$  равны.

5. Найдите все значения параметра  $b$ , при которых система уравнений

$$\begin{cases} x = -|b - y^2|, \\ y = a(x + b^2) \end{cases}$$

имеет решение при любом значении параметра  $a$ .

6. В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания  $ABCD$  равна 1, боковое ребро равно 4. Сфера с центром  $O$  на плоскости  $BCS$  касается рёбер  $SA$ ,  $SD$  и  $AD$ . Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей  $ABC$  и  $CDS$ , а также радиус сферы.