

Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2020
Заключительный этап
9 класс

Задача 1. Про два ненулевых числа a и b известно, что

$$a^2 + \frac{b^3}{a} = b^2 + \frac{a^3}{b}.$$

Верно ли, что числа a и b равны?

Задача 2. Додсон, Уильямс и их конь Боливар хотят как можно быстрее добраться из города А в город Б. Вдоль дороги стоят 27 телеграфных столбов, которые делят весь путь на 28 одинаковых промежутков. Промежуток между столбами Додсон преодолевает пешком за 9 минут, Уильямс — за 11 минут, а верхом на Бовиваре любой из них преодолевает это расстояние за 3 минуты (Боливар не выдержит двоих). Они выдвигаются из города А одновременно; путешествие считается оконченным, когда все окажутся в городе Б.

Друзья договорились, что часть пути Додсон проедет верхом, затем привяжет Боливара у одного из телеграфных столбов и далее пойдёт пешком, а Уильямс первоначально будет идти пешком, а затем поедет верхом на Бовиваре. У какого столба Додсону надо привязать Боливара, чтобы они преодолели путь до города Б как можно быстрее?

Задача 3. В треугольнике ABC с углами $\angle A = 35^\circ$, $\angle B = 20^\circ$ и $\angle C = 125^\circ$ отмечен центр описанной окружности — точка O . Докажите, что точки O , A , B , C являются вершинами трапеции.

Задача 4. В вершинах правильного 2019-угольника расставили числа так, что сумма чисел в любых девяти подряд идущих вершинах равна 300. Известно, что в 19-й вершине стоит число 19, а в 20-й — число 20. Какое число стоит в 2019-й вершине?

Задача 5. При дворе служат 50 мушкетёров. Каждый день они разбиваются на пары и проводят тренировочные поединки. Верно ли, что спустя 24 дня найдутся три мушкетёра, которые не участвовали в тренировочных поединках друг с другом?