Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2020
Заключительный этап.

11 класс

Задача 1. В Курчатовской школе за каждой партой сидит ровно 2 человека. Известно, что ровно у 70% мальчиков сосед по парте — мальчик, а ровно у 40% девочек — девочка. Во сколько раз мальчиков больше чем девочек?

Задача 2. Найдите количество способов раскрасить все натуральные числа от 1 до 20 в синий и красный цвета так, чтобы оба цвета встречались и произведение всех красных чисел было взаимно просто с произведением всех синих чисел.

Задача 3. На доске написаны числа 2, 3, 5, …, 2003, 2011, 2017, т. е. все простые числа, не превосходящие 2020. За одну операцию можно заменить два числа a, b на максимальное простое число, не превосходящее $\sqrt{a^2-ab+b^2}$. После нескольких операций на доске осталось одно число. Какое максимальное значение оно может принимать?

Задача 4. Пусть $SABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида с основанием $ABCD$. На отрезке AC нашлась точка M такая, что $SM = MB$ и плоскости SBM и SAB перпендикулярны. Найдите отношение $AM : AC$.

Задача 5. Докажите, что при натуральном $n > 2$ числа от 1 до n можно разбить на два множества так, чтобы произведения чисел в множествах отличались не более чем в $\frac{n-1}{n-2}$

Задача 6. Докажите, что существуют такие последовательности натуральных чисел a_n и b_n, что одновременно выполнены следующие условия:

- последовательности a_n и b_n являются неубывающими;
- последовательности $A_n = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}$ и $B_n = \dfrac{1}{b_1} + \dfrac{1}{b_2} + \ldots + \dfrac{1}{b_n}$ неограниченно возрастают;
- последовательность $C_n = \dfrac{1}{\max(a_1, b_1)} + \dfrac{1}{\max(a_2, b_2)} + \ldots + \dfrac{1}{\max(a_n, b_n)}$ ограничена.