Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2020
Заключительный этап
9 класс

Задача 1. Про два ненулевых числа a и b известно, что

$$a^2 + \frac{b^3}{a} = b^2 + \frac{a^3}{b}\,.$$

Верно ли, что числа a и b равны?

Ответ: нет

Решение. Равенство выполняется при $a = -b$, например, при $a = 1$ и $b = -1$. $\square$

Замечание. На самом деле, равенство выполняется только при $a = b$ или $a = -b$. Действительно, домножив его на a/b^3 и обозначив $a/b = \lambda$, получим $\lambda^3 + 1 = \lambda + \lambda^4$. Это эквивалентно равенству $\lambda^4 - \lambda^3 + \lambda - 1 = 0$, где левая часть раскладывается на множители: $(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1) = 0$. Нетрудно понять, что $\lambda = \pm 1$ являются единственными корнями этого уравнения, что соответствует $a = \pm b$.

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи. В частности, достаточно привести пример различных a и b, при которых достигается равенство, или указать, что это происходит при $a = -b$.

0 б. Есть только ответ «нет».

Задача 2. Додсон, Уильямс и их конь Боливар хотят как можно быстрее добраться из города А в город Б. Вдоль дороги стоят 27 телеграфных столбов, которые делят весь путь на 28 одинаковых промежутков. Промежуток между столбами Додсон преодолевает пешком за 9 минут, Уильямс — за 11 минут, а верхом на Боливаре любой из них преодолевает это расстояние за 3 минуты (Боливар не выдержит двоих). Они выдвигаются из города А одновременно; путешествие считается оконченным, когда все окажутся в городе Б.

Друзья договорились, что часть пути Додсон проедет верхом, затем привяжет Боливара у одного из телеграфных столбов и далее пойдёт пешком, а Уильямс первоначально будет идти пешком, а затем поедет верхом на Боливаре. У какого столба Додсону надо привязать Боливара, чтобы они преодолели путь до города Б как можно быстрее?

Ответ: у 12-го, считая от А.

Решение. Примем расстояние от А до Б за единицу, а время будет измерять в минутах. Тогда скорость Додсона равна $1/9$, скорость Уильямса — $1/11$, а скорость Боливара — $1/3$.

Пусть искомый столб имеет номер k (то есть расстояние от города А равно $k/28$). Тогда Додсон доберется за время

$$\frac{k}{28} : \frac{1}{3} + \frac{28-k}{28} : \frac{1}{9} = 9 - \frac{6k}{28}\,,$$

а Уильямс за

$$\frac{k}{28} : \frac{1}{11} + \frac{28-k}{28} : \frac{1}{3} = 3 + \frac{8k}{28}\,.$$

Найдём k, при котором эти значения совпадают:

$$9 - \frac{6k}{28} = 3 + \frac{8k}{28} \quad \Leftrightarrow \quad 6 \cdot 28 = 14k \quad \Leftrightarrow \quad k = 12\,.$$

Осталось понять, почему $k = 12$ даёт наилучшее время. Действительно, при меньших k увеличится время Додсона, а при бо́льших — время Уильямса. Таким образом, при всех остальных k время хотя бы одного из персонажей будет больше, чем при $k = 12$. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

4 б. Найдено положение столба, при котором время персонажей совпадает, но не доказано, что это наилучшее время.

2 б. Имеется идея приравнять время персонажей, но допущена ошибка при составлении или решении уравнения.

1 б. Есть верный ответ.

Задача 3. В треугольнике ABC с углами $\angle A = 35°$, $\angle B = 20°$ и $\angle C = 125°$ отмечен центр описанной окружности — точка O. Докажите, что точки O, A, B, C являются вершинами трапеции.

Решение. Ясно, что раз угол C треугольника тупой, то точки C и O лежат по разные стороны от прямой AB (рис. 3). Центральный угол BOA, соответствующий вписанному углу BCA, равен $250°$; внутренний угол BOA интересующего нас четырёхугольника дополняет его до $360°$ и равен $110°$.

Так как треугольник BOA равнобедренный, углы ABO и BAO равны по $90° - \frac{110°}{2} = 35°$. Теперь можно заметить, что углы CAB и ABO равны по $35°$ и

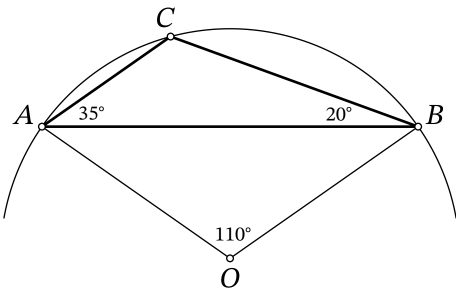

Рис. 3: к решению задачи 3

являются накрест лежащими при прямых CA и BO и секущей AB, то есть прямые CA и BO параллельны.

С другой стороны, углы CBA и BAO не равны, откуда следует, что прямые CB и AO не параллельны. Это означает, что $OACB$ — трапеция (и не параллелограмм). $\square$

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов.

За отсутствие доказательства того, что $OACB$ не является параллелограммом, баллы не снижаются.

Задача 4. В вершинах правильного 2019-угольника расставили числа так, что сумма чисел в любых девяти подряд идущих вершинах равна 300. Известно, что в 19-й вершине стоит число 19, а в 20-й — число 20. Какое число стоит в 2019-й вершине?

Ответ: 61.

Решение. Обозначим числа в вершинах за $x_1, x_2, \ldots, x_{2019}$. Так как сумма любых девяти подряд идущих чисел одинаковая, то числа, стоящие через 8 других, равны. Отсюда $x_1 = x_{10} = x_{19} = \ldots = x_{1+9k} = \ldots$. Так как 2019 не делится на 9, но делится на 3, то при продолжении этой цепочки по циклу в неё войдут все числа вида x_{3k+1}. Аналогичные цепочки можно построить от чисел x_2 и x_3. Получается, что числа, стоящие в вершинах, имеющих одинаковые остатки при делении на 3, равны.

Так как каждая девятка подряд идущих чисел содержит три набора вершин с разными остатками от деления на 3, то сумма чисел в каждом таком наборе равна 100. Заметим, что 19 даёт остаток 1 при делении на 3, 20 даёт остаток 2, а 2019 даёт остаток 0, поэтому число, записанное в вершине 2019, равно $100 - 19 - 20 = 61$. $\square$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

4 б. Доказано, что числа, идущие через 2, равны.

1 б. Замечено, что числа, идущие через 8, равны.

Задача 5. При дворе служат 50 мушкетёров. Каждый день они разбиваются на пары и проводят тренировочные поединки. Верно ли, что спустя 24 дня найдутся три мушкетёра, которые не участвовали в тренировочных поединках друг с другом?

Ответ: да, найдутся.

Решение. Предположим противное — пусть такой тройки мушкетёров не найдется.

Выделим одного мушкетёра, пусть его зовут Петя. Согласно условию, он вступал в поединки не более чем с 24 другими. Рассмотрим множество из 25 мушкетёров, с которыми он не вступал в поединки (если их больше, часть уберём из рассмотрения), и покрасим их в синий цвет.

Среди синих мушкетёров любые два должны были встречаться в поединке, иначе вместе с Петей они образуют искомую тройку. Получается, каждый из синих мушкетёров провёл по поединку с каждым из остальных синих, а с другими мушкетёрами не проводил, ведь всего поединков у него только 24.

Теперь рассмотрим произвольный день, в который проходили поединки. Синие мушкетёры в этот день должны разбиться на пары между собой, ведь ни с кем больше они в поединки не вступали. Но это противоречит тому, что их нечётное число. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

3 б. Рассмотрено множество мушкетёров, с которыми некоторый фиксированный мушкетёр не вступал в поединки, и указано, что в этом множестве все вступали друг с другом в поединки.

0 б. Есть только ответ «да».