Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2020
Заключительный этап
8 класс

Задача 1. Про два ненулевых числа a и b известно, что

$$a^2 + \frac{b^3}{a} = b^2 + \frac{a^3}{b}\,.$$

Верно ли, что числа a и b равны?

Ответ: нет

Решение. Равенство выполняется при $a = -b$, например, при $a = 1$ и $b = -1$. □

Замечание. На самом деле, равенство выполняется только при $a = b$ или $a = -b$. Действительно, домножив его на a/b^3 и обозначив $a/b = \lambda$, получим $\lambda^3 + 1 = \lambda + \lambda^4$. Это эквивалентно равенству $\lambda^4 - \lambda^3 + \lambda - 1 = 0$, где левая часть раскладывается на множители: $(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1) = 0$. Нетрудно понять, что $\lambda = \pm 1$ являются единственными корнями этого уравнения, что соответствует $a = \pm b$.

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи. В частности, достаточно привести пример различных a и b, при которых достигается равенство, или указать, что это происходит при $a = -b$.

0 б. Есть только ответ «нет».

Задача 2. У квадрата 5×5 есть 5 столбцов, 5 строк и 18 диагоналей, включая диагонали длины один. В каждой клетке этого квадрата Вова написал число 1, 3, 5 или 7, а Лёша посчитал сумму чисел по каждому столбцу, строке и диагонали. Докажите, что среди полученных Лёшей сумм есть хотя бы две равные.

Решение. Будем называть строку, столбец или диагональ, вдоль которой Андрей суммировал числа, *линией.* Заметим, что всего есть 20 линий, состоящих из нечётного числа клеток (по 5 линий каждого направления). Так как все числа в таблице нечётны, то и все суммы в этих линиях нечётны. При этом они не могут превышать $5 \cdot 7 = 35$. Нечётных чисел от 1 до 35 всего $(35-1)/2+1 = 18$. Значит, по принципу Дирихле в каких-то двух линиях окажется одно и то же число. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

1 б. Идея рассмотрения только линий с нечётным количеством клеток или только нечётных сумм или сумм с нечётным количеством слагаемых, но дальнейших продвижений нет.

3 б. Указано, что линий с нечётным количеством клеток ровно 20, но дальнейших продвижений нет.

3 б. Указано, что возможных нечётных сумм всего 18, но дальнейших продвижений нет.

Задача 3. Додсон, Уильямс и их конь Боливар хотят как можно быстрее добраться из города А в город Б. Вдоль дороги стоят 27 телеграфных столбов, которые делят весь путь на 28 одинаковых промежутков. Промежуток между столбами Додсон преодолевает пешком за 9 минут, Уильямс — за 11 минут, а верхом на Боливаре любой из них преодолевает это расстояние за 3 минуты (Боливар не выдержит двоих). Они выдвигаются из города А одновременно; путешествие считается оконченным, когда все окажутся в городе Б.

Друзья договорились, что часть пути Додсон проедет верхом, затем привяжет Боливара у одного из телеграфных столбов и далее пойдёт пешком, а Уильямс первоначально будет идти пешком, а затем поедет верхом на Боливаре. У какого столба Додсону надо привязать Боливара, чтобы они преодолели путь до города Б как можно быстрее?

Ответ: у 12-го, считая от А.

Решение. Примем расстояние от А до Б за единицу, а время будем измерять в минутах. Тогда скорость Додсона равна $1/9$, скорость Уильямса — $1/11$, а скорость Боливара — $1/3$.

Пусть искомый столб имеет номер k (то есть расстояние от города А равно $k/28$). Тогда Додсон доберется за время

$$\frac{k}{28} : \frac{1}{3} + \frac{28-k}{28} : \frac{1}{9} = 9 - \frac{6k}{28},$$

а Уильямс за

$$\frac{k}{28} : \frac{1}{11} + \frac{28-k}{28} : \frac{1}{3} = 3 + \frac{8k}{28}.$$

Найдём k, при котором эти значения совпадают:

$$9 - \frac{6k}{28} = 3 + \frac{8k}{28} \quad \Leftrightarrow \quad 6 \cdot 28 = 14k \quad \Leftrightarrow \quad k = 12.$$

Осталось понять, почему $k = 12$ даёт наилучшее время. Действительно, при меньших k увеличится время Додсона, а при бóльших — время Уильямса. Таким образом, при всех остальных k время хотя бы одного из персонажей будет больше, чем при $k = 12$. $\square$

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

4 б. Найдено положение столба, при котором время персонажей совпадает, но не доказано, что это наилучшее время.

2 б. Имеется идея приравнять время персонажей, но допущена ошибка при составлении или решении уравнения.

1 б. Есть верный ответ.

Задача 4. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A проведена высота AH. На продолжении гипотенузы BC за точку C нашлась точка X такая, что

$$HX = \frac{BH + CX}{3}.$$

Докажите, что $2\angle ABC = \angle AXC$.

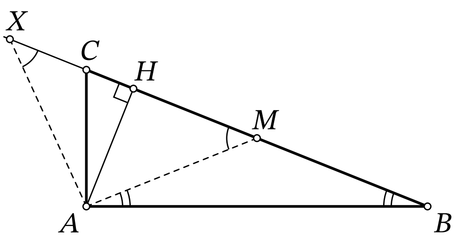


Рис. 2: к решению задачи 4

Решение. Заметив, что $CX = HX - CH$, данное равенство можно переписать как $3HX = BH + (HX - CH)$, или $HX = \frac{1}{2}(BH - CH)$.

Ясно, что величина $HX = \frac{1}{2}(BH - CH)$ положительна. Оказывается, она равна расстоянию от H до середины BC, которую мы обозначим за M. Действительно,

$$HM = |CM - CH| = \left|\tfrac{1}{2}(BH + CH) - CH\right| = \left|\tfrac{1}{2}(BH - CH)\right| = \tfrac{1}{2}(BH - CH).$$

Теперь понятно, как построить точку X другим способом: просто отложим отрезок HM в другую сторону от точки H (рис. 2). Отсюда следует, что треугольник

MAX равнобедренный (его высота AH является и медианой). Воспользовавшись тем, что треугольник AMB также равнобедренный (по свойству медианы, проведённой к гипотенузе), получаем

$$\angle AXC = \angle AMH = \angle ABM + \angle BAM = 2\angle ABM\,. \qquad \square$$

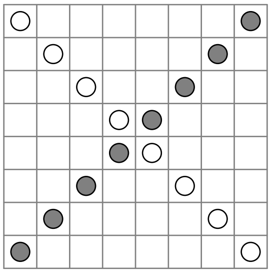
Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов.

Задача 5. В клетках шахматной доски 8×8 стоят 8 белых и 8 чёрных фишек так, что никакие две фишки не стоят в одной клетке. Кроме того, ни в одном столбце и ни в одной строке не стоят одноцветные фишки. Для каждой белой фишки посчитали расстояние до чёрной фишки, стоящей с ней в одном столбце. Какое наибольшее значение может принимать сумма этих расстояний? Расстоянием между фишками будем считать расстояние между центрами клеток, которые они занимают.

Ответ: 32

Решение. Пример расположения фишек, при котором сумма расстояний равна 32, приведён на рисунке:



Докажем, что больше 32 сумма расстояний быть не может. Для этого рассмотрим произвольную расстановку фишек, удовлетворяющую условию. Пусть S — это сумма расстояний, указанных в условии.

Пусть в i-м столбце белая и чёрная фишка находятся соответственно в строках a_i и b_i. Оценим расстояние между ними:

$$|a_i - b_i| = |(a_i - 4{,}5) - (b_i - 4{,}5)| \leqslant |a_i - 4{,}5| + |b_i - 4{,}5|$$

(по сути это неравенство треугольника для точек a_i, b_i и 4,5 на прямой).

Просуммировав эту оценку для всех разностей $|a_i - b_i|$, получим

$$S \leqslant |a_1 - 4{,}5| + |a_2 - 4{,}5| + \ldots + |a_8 - 4{,}5| + |b_1 - 4{,}5| + |b_2 - 4{,}5| + \ldots + |b_8 - 4{,}5|\,.$$

Заметим, что правая часть не зависит от расположения фишек, так как числа a_i, $0 \leqslant i \leqslant 8$, являются некоторой перестановкой чисел от 1 до 8. Аналогично с b_i. Имеем

$$S \leqslant |1-4{,}5| + |2-4{,}5| + \ldots + |8-4{,}5| + |1-4{,}5| + |2-4{,}5| + \ldots + |8-4{,}5| = \\ = 2 \cdot (3{,}5 + 2{,}5 + 1{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 + 1{,}5 + 2{,}5 + 3{,}5) = 32\,. \qquad \square$$

Замечание. Из доказательства оценки нетрудно понять, как устроен любой пример с нужной суммой расстояний: в каждом столбце фишка одного цвета находится в верхней половине, а фишка другого цвета — в нижней. В ином случае равенство в неравенстве треугольника не будет достигаться.

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

6 б. Доказано, что сумма расстояний не может превышать 32.

Если решение необоснованно сводится к некоторому «оптимальному» случаю или классу случаев (например, бездоказательно утверждается, что в каждом столбце чёрная и белая фишки должны располагаться в разных половинах столбца), то баллы за эту часть не ставятся.

1 б. Приведён пример расположения фишек, сумма расстояний в котором равна 32.