8-9 классы

Задача 1/1. Квадратный остров размерами 80×80 метров разделён на 16 участков земли, каждый из которых имеет размеры либо 20×20 метров, либо 10×40 метров. Все участки разделены заборами суммарной длины 540 метров. На берегах острова заборов нет. Сколько участков земли размером 10×40 метров есть на острове?

Ответ: 6.

Решение. Пусть x — количество участков земли размером 10×40 метров. Тогда количество участков земли размером 20×20 метров равно $16-x$.

Суммарный периметр всех участков земли равен удвоенной длине всех заборов плюс периметр острова. Составим уравнение

$$100x+80(16-x)=2\cdot540+320\,;$$
$$20x+1280=1400\,;$$
$$x=6\,.$$

□

Задача 1/2. Квадратный остров размерами 80×80 метров разделён на 16 участков земли, каждый из которых имеет размеры либо 20×20 метров, либо 10×40 метров. Все участки разделены заборами суммарной длины 520 метров. На берегах острова заборов нет. Сколько участков земли размером 10×40 метров есть на острове?

Ответ: 4.

Решение. Пусть x — количество участков земли размером 10×40 метров. Тогда количество участков земли размером 20×20 метров равно $16-x$.

Суммарный периметр всех участков земли равен удвоенной длине всех заборов плюс периметр острова. Составим уравнение

$$100x+80(16-x)=2\cdot520+320\,;$$
$$20x+1280=1360\,;$$
$$x=4\,.$$

□

Задача 1/3. Квадратный остров размерами 80×80 метров разделён на 16 участков земли, каждый из которых имеет размеры либо 20×20 метров, либо 10×40 метров. Все участки разделены заборами суммарной длины 560 метров. На берегах острова заборов нет. Сколько участков земли размером 10×40 метров есть на острове?

Ответ: 8.

Решение. Пусть x — количество участков земли размером 10×40 метров. Тогда количество участков земли размером 20×20 метров равно $16 - x$.

Суммарный периметр всех участков земли равен удвоенной длине всех заборов плюс периметр острова. Составим уравнение

$$\begin{gathered} 100x + 80(16 - x) = 2 \cdot 560 + 320\,; \\ 20x + 1280 = 1440\,; \\ x = 8\,. \end{gathered}$$

□

Задача 2/1. Юра выписал в ряд все натуральные числа от 1 до 1000000. Затем вычеркнул все числа, которые делятся либо на 3, либо на 7. Какое число будет двухтысячным по величине среди невычеркнутых чисел?

Ответ: 3499.

Решение. Выпишем все числа от 1 до 21 и подчеркнём все числа, не кратные 3 или 7.

$$\underline{1}\ \ \underline{2}\ \ 3\ \ \underline{4}\ \ \underline{5}\ \ 6\ \ 7\ \ \underline{8}\ \ 9\ \ \underline{10}\ \ \underline{11}\ \ 12\ \ \underline{13}\ \ 14\ \ 15\ \ \underline{16}\ \ \underline{17}\ \ 18\ \ \underline{19}\ \ \underline{20}\ \ 21\,.$$

Нетрудно понять, что среди чисел от 1 до 21 не будут вычеркнуты 12 чисел, среди чисел от 22 до 42 не будут вычеркнуты 12 чисел, среди чисел от 43 до 63 не будут вычеркнуты 12 чисел, ... (каждый из промежутков заканчивается числом, кратным 21).

Число 1992 — ближайшее к 2000, кратное 12. Поэтому если среди чисел от 1 до $(1992 : 12) \cdot 21 = 3486$ вычеркнуть все кратные 3 или 7, то останется 1992 числа. Осталось 8 чисел до 2000.

Среди чисел от 1 до 21 восьмым подчёркнутым числом является 13. Поэтому ответ в задаче: $3486 + 13 = 3499$. □

Задача 2/2. Юра выписал в ряд все натуральные числа от 1 до 1000000. Затем вычеркнул все числа, которые делятся либо на 5, либо на 7. Какое число будет двухтысячным по величине среди невычеркнутых чисел?

Ответ: 2916.

Решение. Выпишем все числа от 1 до 35 и подчеркнём все числа, не кратные 5 или 7.

$$\begin{gathered} \underline{1}\ \ \underline{2}\ \ \underline{3}\ \ \underline{4}\ \ 5\ \ \underline{6}\ \ 7\ \ \underline{8}\ \ \underline{9}\ \ 10\ \ \underline{11}\ \ \underline{12}\ \ \underline{13}\ \ 14\ \ 15\ \ \underline{16}\ \ \underline{17}\ \ \underline{18}\ \ \underline{19} \\ 20\ \ 21\ \ \underline{22}\ \ \underline{23}\ \ \underline{24}\ \ 25\ \ \underline{26}\ \ \underline{27}\ \ 28\ \ \underline{29}\ \ 30\ \ \underline{31}\ \ \underline{32}\ \ \underline{33}\ \ \underline{34}\ \ 35\,. \end{gathered}$$

Нетрудно понять, что среди чисел от 1 до 35 не будут вычеркнуты 24 числа, среди чисел от 36 до 70 не будут вычеркнуты 24 числа, среди чисел от 71 до 105 не будут вычеркнуты 24 числа, ... (каждый из промежутков заканчивается числом, кратным 35).

Число 1992 — ближайшее к 2000, кратное 24. Поэтому если среди чисел от 1 до $(1992 : 24) \cdot 35 = 2905$ вычеркнуть все кратные 5 или 7, то останется 1992 числа. Осталось 8 чисел до 2000.

Среди чисел от 1 до 35 восьмым подчёркнутым числом является 11. Поэтому ответ в задаче: $2905 + 11 = 2916$. □

Задача 2/3. Юра выписал в ряд все натуральные числа от 1 до 1000000. Затем вычеркнул все числа, которые делятся либо на 3, либо на 8. Какое число будет двухтысячным по величине среди невычеркнутых чисел?

Ответ: 3428.

Решение. Выпишем все числа от 1 до 24 и подчеркнём все числа, не кратные 3 или 8.

$$\underline{1}\ \underline{2}\ 3\ \underline{4}\ \underline{5}\ 6\ \underline{7}\ 8\ 9\ \underline{10}\ \underline{11}\ 12\ \underline{13}\ \underline{14}\ 15\ 16\ \underline{17}\ 18\ \underline{19}\ \underline{20}\ 21\ \underline{22}\ \underline{23}\ 24\,.$$

Нетрудно понять, что среди чисел от 1 до 24 не будут вычеркнуты 14 чисел, среди чисел от 25 до 48 не будут вычеркнуты 14 чисел, среди чисел от 49 до 72 не будут вычеркнуты 14 чисел, ... (каждый из промежутков заканчивается числом, кратным 24).

Число 1988 — ближайшее к 2000, кратное 14. Поэтому если среди чисел от 1 до $(1988 : 14) \cdot 24 = 3408$ вычеркнуть все кратные 3 или 8, то останется 1988 числа. Осталось 12 чисел до 2000.

Среди чисел от 1 до 24 двенадцатым подчёркнутым числом является 20. Поэтому ответ в задаче: $3408 + 20 = 3428$. □

Задача 3. Будем называть натуральное число *нечётностепенным,* если все его простые делители входят в его разложение в нечётной степени. Какое наибольшее количество нечётностепенных чисел может идти подряд?

Ответ: 7.

Решение. Заметим, что среди любых восьми подряд идущих натуральных чисел обязательно встретится число, кратное 4, но не кратное 8. Тогда двойка будет входить в его разложение во второй степени.

Пример семи нечётностепенных чисел: 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43. □

Задача 4/1. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D. Известно, что $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle DBC = 75^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$. Найдите CD, если известно, что $BA + AD = 14$.

Ответ: 7.

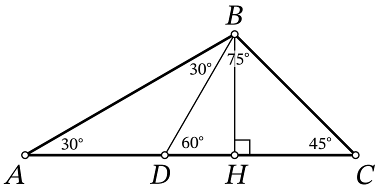

Рис. 1: к решению задачи 4/1

Решение. Из суммы углов треугольника ABC следует, что $\angle ABD = 30°$. Следовательно, $AD = BD$.

Проведём высоту BH в треугольнике ABC (рис. 1). Треугольник BHC — прямоугольный равнобедренный, поэтому $CH = BH$. Треугольники ABH и BDH — прямоугольные с углом $30°$, поэтому в них катеты напротив угла $30°$ в два раза меньше гипотенузы. Получается, что $2BH = AB$, $2HD = BD$.

Тогда

$$CD = CH + HD = BH + HD = \frac{AB}{2} + \frac{BD}{2} = \frac{AB + AD}{2} = 7\,. \qquad \square$$

Задача 4/2. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D. Известно, что $\angle BAC = 30°$, $\angle DBC = 75°$, $\angle BCA = 45°$. Найдите CD, если известно, что $BA + AD = 16$.

Ответ: 8.

Решение. Из суммы углов треугольника ABC следует, что $\angle ABD = 30°$. Следовательно, $AD = BD$.

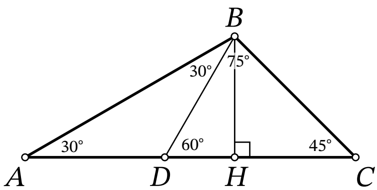

Рис. 2: к решению задачи 4/2

Проведём высоту BH в треугольнике ABC (рис. 2). Треугольник BHC — прямоугольный равнобедренный, поэтому $CH = BH$. Треугольники ABH и BDH — прямоугольные с углом $30°$, поэтому в них катеты напротив угла $30°$ в два раза меньше гипотенузы. Получается, что $2BH = AB$, $2HD = BD$.

Тогда

$$CD = CH + HD = BH + HD = \frac{AB}{2} + \frac{BD}{2} = \frac{AB + AD}{2} = 8\,. \qquad \square$$

Задача 4/3. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D. Известно, что $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle DBC = 75^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$. Найдите CD, если известно, что $BA + AD = 18$.

Ответ: 9.

Решение. Из суммы углов треугольника ABC следует, что $\angle ABD = 30^\circ$. Следовательно, $AD = BD$.

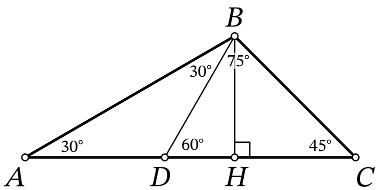

Рис. 3: к решению задачи 4/3

Проведём высоту BH в треугольнике ABC (рис. 3). Треугольник BHC — прямоугольный равнобедренный, поэтому $CH = BH$. Треугольники ABH и BDH — прямоугольные с углом 30°, поэтому в них катеты напротив угла 30° в два раза меньше гипотенузы. Получается, что $2BH = AB$, $2HD = BD$.

Тогда

$$CD = CH + HD = BH + HD = \frac{AB}{2} + \frac{BD}{2} = \frac{AB + AD}{2} = 9\,. \qquad \square$$

Задача 5/1. В ряд лежат 40 фишек: 28 красных и 12 синих. Раз в минуту можно менять две соседние фишки местами. За какое минимальное время можно гарантированно сделать так, чтобы все синие фишки были расположены подряд? Ответ дайте в минутах.

Ответ: 168.

Решение. Для того чтобы синие фишки стояли подряд, необходимо и достаточно, чтобы все красные фишки стояли с краёв (возможно, все с одного края).

Оценка. Пусть есть строка с произвольной расстановкой синих и красных фишек. Будем перемещать красные фишки к правому или к левому краю так, чтобы правее или левее них уже не было синих фишек. Для этого сначала выберем самую правую и самую левую красную фишку. Для того чтобы одна из них оказалась с краю, требуется не более 6 минут, так как либо слева от самой левой, либо справа от самой правой красной фишки стоит не более чем 6 синих фишек.

Далее возьмём самую правую и самую левую красную фишку из оставшихся 27. Рассуждая аналогично, получим, что для указанного перемещения опять потребуется не более 6 минут, и так далее. Таким образом, для получения требуемой расстановки потребуется не более $28 \cdot 6 = 168$ минут.

Пример. Приведём изначальную расстановку такую, что меньшего количества ходов не хватит. Пусть в ряд стоят 6 синих фишек, затем 28 красных, а затем ещё 6 синих. В этом случае для перемещения каждой красной фишки к краю потребуется ровно 6 минут. □

Задача 5/2. В ряд лежат 40 фишек: 26 красных и 14 синих. Раз в минуту можно менять две соседние фишки местами. За какое минимальное время можно гарантированно сделать так, чтобы все синие фишки были расположены подряд? Ответ дайте в минутах.

Ответ: 182.

Решение. Для того чтобы синие фишки стояли подряд, необходимо и достаточно, чтобы все красные фишки стояли с краёв (возможно, все с одного края).

Оценка. Пусть есть строка с произвольной расстановкой синих и красных фишек. Будем перемещать красные фишки к правому или к левому краю так, чтобы правее или левее них уже не было синих фишек. Для этого сначала выберем самую правую и самую левую красную фишку. Для того чтобы одна из них оказалась с краю, требуется не более 7 минут, так как либо слева от самой левой, либо справа от самой правой красной фишки стоит не более, чем 7 синих фишек.

Далее возьмём самую правую и самую левую красную фишку из оставшихся 25. Рассуждая аналогично, получим, что для указанного перемещения опять потребуется не более 7 минут, и так далее. Таким образом, для получения требуемой расстановки потребуется не более $26 \cdot 7 = 182$ минуты.

Пример. Приведём изначальную расстановку такую, что меньшего количества ходов не хватит. Пусть в ряд стоят 7 синих фишек, затем 26 красных, а затем ещё 7 синих. В этом случае для перемещения каждой красной фишки к краю потребуется ровно 7 минут. □

Задача 5/3. В ряд лежат 40 фишек: 24 красных и 16 синих. Раз в минуту можно менять две соседние фишки местами. За какое минимальное время можно гарантированно сделать так, чтобы все синие фишки были расположены подряд? Ответ дайте в минутах.

Ответ: 192.

Решение. Для того чтобы синие фишки стояли подряд, необходимо и достаточно, чтобы все красные фишки стояли с краёв (возможно, все с одного края).

Оценка. Пусть есть строка с произвольной расстановкой синих и красных фишек. Будем перемещать красные фишки к правому или к левому краю так, чтобы правее или левее них уже не было синих фишек. Для этого сначала выберем самую правую и самую левую красную фишку. Для того чтобы одна из них оказалась с краю, требуется не более 8 минут, так как либо слева от самой левой, либо справа от самой правой красной фишки стоит не более, чем 8 синих фишек.

Далее, возьмём самую правую и самую левую красную фишку из оставшихся 23. Рассуждая аналогично, получим, что для указанного перемещения опять потребуется не более 8 минут, и так далее. Таким образом, для получения требуемой расстановки потребуется не более $24 \cdot 8 = 192$ минуты.

Пример. Приведём изначальную расстановку такую, что меньшего количества ходов не хватит. Пусть в ряд стоят 8 синих фишек, затем 24 красных, а затем ещё 8 синих. В этом случае для перемещения каждой красной фишки к краю потребуется ровно 8 минут. $\square$

Задача 6/1. Полина представила число 1234 в виде суммы нескольких натуральных чисел так, что произведение этих чисел максимально возможное. Известно, что это произведение делится на 3^k, но не делится на 3^{k+1}. Найдите k.

Ответ: 410.

Решение. Пусть 1234 представлено в виде суммы $a_1 + a_2 + \ldots$. Безусловно, если среди слагаемых присутствуют единицы, то произведение не является максимальным (любую единицу можно добавить к другому слагаемому, и произведение увеличится).

Если какое-нибудь $a_i \geqslant 4$, то заменим его на два слагаемых 2 и $a_i - 2$. Нетрудно понять, что $2(a_i - 2) \geqslant a_i$. Сделаем всевозможные такие замены, при этом общее произведение не уменьшится.

Наше произведение будет иметь вид $2^n 3^k$. Заметим, что $3 + 3 = 2 + 2 + 2$, и $3^2 > 2^3$. Следовательно, если присутствуют хотя бы 3 двойки, то при замене их на 2 тройки произведение увеличится. Получается, двоек не более двух, а все остальные слагаемые — тройки.

Тогда однозначно восстанавливается разбиение:

$$1234 = 2 + 2 + \underbrace{3 + 3 + \ldots + 3}_{410}. \qquad \square$$

Задача 6/2. Полина представила число 2345 в виде суммы нескольких натуральных чисел так, что произведение этих чисел максимально возможное. Известно, что это произведение делится на 3^k, но не делится на 3^{k+1}. Найдите k.

Ответ: 781.

Решение. Пусть 2345 представлено в виде суммы $a_1 + a_2 + \ldots$. Безусловно, если среди слагаемых присутствуют единицы, то произведение не является максимальным (любую единицу можно добавить к другому слагаемому, и произведение увеличится).

Если какое-нибудь $a_i \geqslant 4$, то заменим его на два слагаемых 2 и $a_i - 2$. Нетрудно понять, что $2(a_i - 2) \geqslant a_i$. Сделаем всевозможные такие замены, при этом общее произведение не уменьшится.

Наше произведение будет иметь вид $2^n 3^k$. Заметим, что $3 + 3 = 2 + 2 + 2$, и $3^2 > 2^3$. Следовательно, если присутствуют хотя бы 3 двойки, то при замене их на 2 тройки произведение увеличится. Получается, двоек не более двух, а все остальные слагаемые — тройки.

Тогда однозначно восстанавливается разбиение:

$$2345 = 2 + \underbrace{3 + 3 + \ldots + 3}_{781}. \qquad \square$$

Задача 6/3. Полина представила число 4567 в виде суммы нескольких натуральных чисел так, что произведение этих чисел максимально возможное. Известно, что это произведение делится на 3^k, но не делится на 3^{k+1}. Найдите k.

Ответ: 1521.

Решение. Пусть 4567 представлено в виде суммы $a_1 + a_2 + \ldots$. Безусловно, если среди слагаемых присутствуют единицы, то произведение не является максимальным (любую единицу можно добавить к другому слагаемому, и произведение увеличится).

Если какое-нибудь $a_i \geqslant 4$, то заменим его на два слагаемых 2 и $a_i - 2$. Нетрудно понять, что $2(a_i - 2) \geqslant a_i$. Сделаем всевозможные такие замены, при этом общее произведение не уменьшится.

Наше произведение будет иметь вид $2^n 3^k$. Заметим, что $3 + 3 = 2 + 2 + 2$, и $3^2 > 2^3$. Следовательно, если присутствуют хотя бы 3 двойки, то при замене их на 2 тройки произведение увеличится. Получается, двоек не более двух, а все остальные слагаемые — тройки.

Тогда однозначно восстанавливается разбиение:

$$4567 = 2 + 2 + \underbrace{3 + 3 + \ldots + 3}_{1521}. \qquad \square$$