# Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2020
# Заключительный этап
# 7 класс

**Задача 1.** Поезд состоит из 20 вагонов, которые пронумерованы от 1 до 20, начиная от начала поезда. Некоторые вагоны являются почтовыми. Известно, что

- всего почтовых вагонов — чётное число;
- номер ближайшего к началу поезда почтового вагона равен общему количеству почтовых вагонов;
- номер последнего почтового вагона в четыре раза больше количества почтовых вагонов;
- любой почтовый вагон сцеплен хотя бы с одним другим почтовым вагоном.

Найдите номера всех почтовых вагонов в поезде.

*Ответ:* 4, 5, 15, 16.

*Решение.* Номер последнего почтового вагона не может превышать 20; количество почтовых вагонов в четыре раза меньше этого номера и потому не превышает 5. Так как почтовых вагонов чётное число, то их всего 2 или 4.

Предположим, что их два. Тогда первый из них имеет номер 2, а последний — 8. Но они не соседние, что противоречит условию.

Значит, почтовых вагонов четыре. Первый из них имеет номер 4; ещё один почтовый вагон с ним сцеплен — он может иметь только номер 5. Последний почтовый вагон имеет номер 16; сцепленный с ним — номер 15. □

*Критерии*

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

3 б. Верный ответ.

2 б. Доказано, что почтовых вагонов не может быть 6 и больше.

2 б. Доказано, что почтовых вагонов не может быть 2.

**Задача 2.** У Лёни есть карточки с цифрами от 1 до 7. Сколько существует способов склеить из них два трёхзначных числа (одна карточка не будет использоваться) так, чтобы их произведение делилось на 81, а сумма делилась на 9?

*Ответ:* 36.

*Решение.* Если одно из чисел не делится на 9, то второе тоже, так как их сумма делится на 9. Но тогда произведение не может делиться на 81, противоречие. Следовательно, оба числа делятся на 9.

Тогда сумма цифр в каждом числе делится на 9, а значит, и общая сумма использованных цифр тоже. Сумма всех данных цифр $1+2+\ldots+7$ равна 28. Если выкинуть цифру 1, то останется 27, что делится на 9; при выкидывании остальных цифр получить сумму, кратную 9, нельзя. Значит, использованы цифры 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Заметим, что наименьшая возможная сумма трёх из этих цифр равна $2+3+4 = 9$, а наибольшая — $5+6+7 = 18$. Другие суммы, кратные 9, получить нельзя; а 9 и 18 можно получить только одним способом. Получается, одно число состоит из цифр 2, 3, 4, а второе — из 5, 6, 7.

Есть шесть чисел, которые можно составить из цифр 2, 3, 4, и шесть чисел, которые можно составить из цифр 5, 6, 7. Нам подходят всевозможные пары этих чисел. □

*Критерии*

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

1 б. Доказано, что оба числа должны делится на 9.

2 б. В предположении (возможно, не обоснованном), что оба числа делятся на 9, доказано, что цифра 1 не используется.

3 б. В предположении (возможно, не обоснованном), что оба числа делятся на 9 и цифра 1 не используется, доказано, что одно число состоит из цифр 2, 3, 4, а второе — 5, 6, 7.

    1 б. Предыдущее не доказано, но сформулировано.

1 б. Имеется верный ответ.

**Задача 3.** У квадрата $5 \times 5$ есть 5 столбцов, 5 строк и 18 диагоналей, включая диагонали длины один. В каждой клетке этого квадрата Вова написал число 1, 3, 5 или 7, а Лёша посчитал сумму чисел по каждому столбцу, строке и диагонали. Докажите, что среди полученных Лёшей сумм есть хотя бы две равные.

*Решение.* Будем называть строку, столбец или диагональ, вдоль которой Андрей суммировал числа, *линией.* Заметим, что всего есть 20 линий, состоящих из нечётного числа клеток (по 5 линий каждого направления). Так как все числа в таблице нечётны, то и все суммы в этих линиях нечётны. При этом они не могут превышать $5 \cdot 7 = 35$. Нечётных чисел от 1 до 35 всего $(35-1)/2+1 = 18$. Значит, по принципу Дирихле в каких-то двух линиях окажется одно и то же число. □

*Критерии*

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

1 б. Идея рассмотрения только линий с нечётным количеством клеток или только нечётных сумм или сумм с нечётным количеством слагаемых, но дальнейших продвижений нет.

3 б. Указано, что линий с нечётным количеством клеток ровно $20$, но дальнейших продвижений нет.

3 б. Указано, что возможных нечётных сумм всего $18$, но дальнейших продвижений нет.

**Задача 4.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ с прямым углом $A$ проведена биссектриса $BL$. На отрезке $BC$ выбрана точка $E$, а на отрезке $CL$ — точка $D$ так, что $\angle LDE = 90°$, $AL = DE$. Докажите, что $AB = LD + BE$.

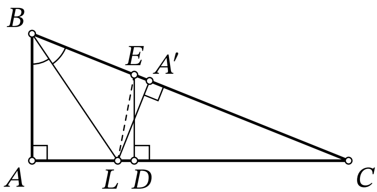


Рис. 1: к решению задачи 4

*Решение.* Отметим на стороне $BC$ точку $A'$ такую, что $BA' = BA$, как на рис. 1. Заметим, что мы свели задачу к $A'B = LD + BE$, что, как легко видеть, эквивалентно $EA' = LD$ (то, что точка $A'$ не может оказаться между $B$ и $E$, будет следовать из дальнейших рассуждений).

Треугольники $BAL$ и $BA'L$ равны по двум сторонам и углу между ними ($BL = BL$, $BA = BA'$, $\angle ABL = \angle A'BL$). Отсюда получаем $A'L = AL = ED$ (это, в частности, означает, что расстояние от $A'$ до $AC$ меньше $ED$, и $A'$ не может оказаться на отрезке $BE$) и $\angle LA'B = 90°$.

Теперь заметим, что треугольники $EA'L$ и $LDE$ прямоугольные и равные, так как у них общая гипотенуза $LD$ и равные катеты $ED$ и $A'L$. Это дает требуемое равенство $EA' = LD$. □

*Замечание.* В последней части решения можно было вместо этого воспользоваться равенством треугольников $LA'C$ и $EDC$ по катету и острому углу. Тогда можно записать цепочку равенств $AB = A'B = BC - A'C = (BC - EC) + (EC - A'C) = BE + (LC - DC) = BE + LD$.

*Критерии*

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

2 б. Есть идея построения точки $A'$ (сделано отражение относительно биссектрисы или отложен отрезок $BA$ на гипотенузе).

**Задача 5.** Шесть мальчиков и шесть девочек встали в круг, чередуясь. Каждый из них написал в своем блокноте ненулевое число. Известно, что каждое число, написанное мальчиком, равно сумме чисел, написанных рядом стоящими девочками, а каждое число, написанное девочкой, равно произведению чисел, написанных рядом стоящими мальчиками. Чему может равняться сумма всех двенадцати чисел?

*Ответ:* 4,5

*Решение.* Выберем произвольных пятерых человек, стоящих по кругу подряд, крайние из которых — мальчики. Пусть их числа равны $x$, $xy$, $y$, $yz$, $z$. Тогда $y = xy + yz$. Так как $y \neq 0$, на него можно сократить, получив $x + z = 1$. Таким образом, сумма любых двух чисел, сказанных мальчиками, стоящими через троих, равна 1.

Пусть мальчики сказали числа $a_1$, $a_2$, ..., $a_6$ (в этом порядке по кругу). Тогда

$$1 = a_1 + a_3 = a_2 + a_4 = \ldots = a_5 + a_1 = a_6 + a_2\,.$$

Можно заметить, что

$$6 = (a_1 + a_3) + (a_2 + a_4) + \ldots + (a_5 + a_1) + (a_6 + a_2) = 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_6)\,,$$

откуда сумма всех чисел мальчиков равна 3.

С другой стороны, сумма чисел мальчиков в два раза больше суммы чисел всех девочек, ведь число каждой девочки является слагаемым для двух мальчиков. Значит, сумма чисел девочек равна 1,5. Общая сумма тогда равна 4,5.

Осталось заметить, что такая ситуация действительно возможна: все мальчики могут написать число $\frac{1}{2}$, а все девочки — число $\frac{1}{4}$. □

*Критерии*

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

7 б. Доказано, что сумма может быть равна только 4,5, но не приведён пример допустимой расстановки чисел.

1 б. Указано, что сумма чисел девочек в два раза меньше суммы чисел мальчиков.

3 б. Доказано, что сумма чисел мальчиков, стоящих «через три», равна 1.

0 б. Верный ответ.

1 б. Верный пример расстановки чисел.