Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2020
Заключительный этап
6 класс

Задача 1. Трое путников подошли к широкой реке, у берега которой им удалось найти старый плот. Надпись на плоте гласит, что он может перевозить не более 7 пудов за раз. Как путникам переправиться через реку, если двое из них весят по 3 пуда, а третий — 5 пудов?

Решение. Сначала двое «лёгких» путников переправятся на второй берег. Потом один из них вернётся с плотом. Далее «тяжёлый» путник переправится на плоту в одиночку. После этого «лёгкий» путник, оставшийся на втором берегу, сможет вернуться на исходный берег с плотом; и это позволит обоим лёгким путникам окончательно переправиться на второй берег. □

Критерии

7 б. Любой верный алгоритм переправы.

Задача 2. Поезд состоит из 20 вагонов, которые пронумерованы от 1 до 20, начиная от начала поезда. Некоторые вагоны являются почтовыми. Известно, что

- всего почтовых вагонов — чётное число;
- номер ближайшего к началу поезда почтового вагона равен общему количеству почтовых вагонов;
- номер последнего почтового вагона в четыре раза больше количества почтовых вагонов;
- любой почтовый вагон сцеплен хотя бы с одним другим почтовым вагоном.

Найдите номера всех почтовых вагонов в поезде.

Ответ: 4, 5, 15, 16.

Решение. Номер последнего почтового вагона не может превышать 20; количество почтовых вагонов в четыре раза меньше этого номера и потому не превышает 5. Так как почтовых вагонов чётное число, то их всего 2 или 4.

Предположим, что их два. Тогда первый из них имеет номер 2, а последний — 8. Но они не соседние, что противоречит условию.

Значит, почтовых вагонов четыре. Первый из них имеет номер 4; ещё один почтовый вагон с ним сцеплен — он может иметь только номер 5. Последний почтовый вагон имеет номер 16; сцепленный с ним — номер 15. □

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

3 б. Верный ответ.

2 б. Доказано, что почтовых вагонов не может быть 6 и больше.

2 б. Доказано, что почтовых вагонов не может быть 2.

Задача 3. У Лёни есть карточки с цифрами от 1 до 7. Сколько существует способов склеить из них два трёхзначных числа (одна карточка не будет использоваться) так, чтобы каждое их них делилось на 9?

Ответ: 36.

Решение. Сумма цифр в каждом числе делится на 9, а значит, и общая сумма использованных цифр тоже. Сумма всех данных цифр $1 + 2 + \ldots + 7$ равна 28. Если выкинуть цифру 1, то останется 27, что делится на 9; при выкидывании остальных цифр получить сумму, кратную 9, нельзя. Значит, использованы цифры 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Заметим, что наименьшая возможная сумма трёх из этих цифр равна $2+3+4 = 9$, а наибольшая — $5+6+7 = 18$. Другие суммы, кратные 9, получить нельзя; а 9 и 18 можно получить только одним способом. Получается, одно число состоит из цифр 2, 3, 4, а второе — из 5, 6, 7.

Есть шесть чисел, которые можно составить из цифр 2, 3, 4, и шесть чисел, которые можно составить из цифр 5, 6, 7. Нам подходят всевозможные пары этих чисел. □

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

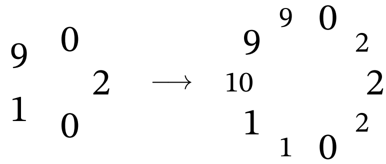
2 б. Доказано, что цифра 1 не используется.

3 б. В предположении (возможно, не обоснованном), что цифра 1 не используется, доказано, что одно число состоит из цифр 2, 3, 4, а второе — 5, 6, 7.

- 1 б. Предыдущее не доказано, но сформулировано.

2 б. Имеется верный ответ.

Задача 4. На доске по кругу написаны пять чисел 2, 0, 1, 9, 0 в указанном порядке по часовой стрелке (последний ноль написан рядом с первой двойкой). За ход между парами соседних чисел вписывается их сумма. Например, такое расположение чисел (справа) будет после первого хода:



Спустя 5 ходов Полина вычислила сумму всех чисел от первого нуля (того, который первоначально был между 2 и 1) до второго нуля (того, который первоначально был между 9 и 2) при обходе круга по часовой стрелке, а Алина — сумму всех остальных чисел. Чему равняется разность чисел Алины и Полины?

Ответ: $8 \cdot 3^5 = 1944$.

Решение. Посмотрим, как меняются числа, заключённые между первым и вторым нулём (которые в конце посчитает Полина). На очередном ходу каждое «старое» число входит в качестве слагаемого в два «новых» числа. Это означает, что если все «новые» числа сложить, то каждое «старое» число окажется просуммировано дважды, то есть сумма «новых» чисел в два раза больше суммы «старых». Таким образом, общая сумма чисел, заключённых между первым и вторым нулём, на каждом ходу утраивается.

То же самое происходит и с остальными числами. Осталось заметить, что их разность изначально равна 8, и будет утраиваться каждый ход. Через пять ходов она достигнет значения $8 \cdot 3^5 = 1944$. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

- 7 б. Любое полное решение задачи.
- 4 б. Доказано, что сумма чисел на отрезке между двумя нулями утраивается на каждом ходу.
- 3 б. Есть верный ответ.

Задача 5. У Ивана Царевича есть 10 золотых монет. Он знает, что среди них есть 5 настоящих и 5 фальшивых, но не умеет их отличать друг от друга. Как известно, Баба Яга умеет отличать фальшивые монеты от настоящих. Иван договорился с Бабой Ягой, что он будет показывать на любые три монеты, а она будет выбирать две из них (Иван знает, какие монеты выбирает Баба Яга) и говорить, сколько из них фальшивых. Сможет ли Баба Яга, говоря только правду, сделать так, чтобы Иван не смог распознать все 5 фальшивых монет за 2020 вопросов?

Ответ: да.

Решение. Пусть Баба Яга выберет одну фальшивую монету и одну настоящую, и назовёт их *секретными.* Тогда она может добиться того, чтобы Иван не узнал, какая из них какая, следующим способом.

Если Иван спрашивает про три монеты, среди которых одна секретная, Баба Яга выберет две несекретные монеты и скажет, сколько среди них фальшивых. Если Иван спрашивает про три монеты, среди которых обе секретных, Баба Яга выберет две секретные монеты и ответит, что среди них одна фальшивая. А если Иван спросит про три монеты, среди которых секретных нет, Баба Яга выберет две произвольные из них и скажет, сколько среди них фальшивых.

Заметим, что если две секретные монеты поменять местами, то ответы Бабы Яги не изменятся. Значит, с точки зрения Ивана Царевича ситуация, в которой первая секретная монета настоящая, и ситуация, в которой она фальшивая, останутся возможны, и исключить ни одну из них ему не удастся. Получается, что угадать все фальшивые монеты он не сможет. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

5 б. Приведён верный алгоритм действий Бабы Яги, но почему он работает, не очевидно.

0 б. Есть только ответ «да».

В случае, если в решении приводится алгоритм действий Бабы Яги, аналогичный описанному выше, баллы за следующие недочёты не снижаются:

- Указано, но не доказано, что Иван не сможет различить секретные монеты.
- Не указано, что делает Баба Яга в случае, когда среди трёх монет секретных нет.