6-7 классы

Задача 1/1. В каждой клетке прямоугольной таблицы 5×9 написано целое число, причём числа в двух соседних по стороне клетках отличаются ровно на 1. В таблице встречаются числа 5 и -7 ровно по одному разу. Сколько раз встречается число 0?

Ответ: 5.

Решение. Рассмотрим кратчайший путь по клеткам из клетки с числом -7 в клетку с числом 5. Заметим, что на этом пути встречаются все целые числа от -7 до 5. Следовательно, этот путь состоит хотя бы из 13 клеток. Но если кратчайший путь из клетки в клетку в таблице 5×9 имеет длину 13, то эти клетки находятся в противоположных углах таблицы.

После этого замечания расстановка чисел в таблице однозначно восстанавливается:

-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

$\square$

Задача 1/2. В каждой клетке прямоугольной таблицы 6×7 написано целое число, причём числа в двух соседних по стороне клетках отличаются ровно на 1. В таблице встречаются числа 6 и -5 ровно по одному разу. Сколько раз встречается число 0?

Ответ: 6.

Решение. Рассмотрим кратчайший путь по клеткам из клетки с числом -5 в клетку с числом 6. Заметим, что на этом пути встречаются все целые числа от -5 до 6. Следовательно, этот путь состоит хотя бы из 12 клеток. Но если кратчайший путь из клетки в клетку в таблице 6×7 имеет длину 12, то эти клетки находятся в противоположных углах таблицы.

После этого замечания расстановка чисел в таблице однозначно восстанавливается:

-5	-4	-3	-2	-1	0	1
-4	-3	-2	-1	0	1	2
-3	-2	-1	0	1	2	3
-2	-1	0	1	2	3	4
-1	0	1	2	3	4	5
0	1	2	3	4	5	6

$\square$

Задача 1/3. В каждой клетке прямоугольной таблицы 8×10 написано целое число, причём числа в двух соседних по стороне клетках отличаются ровно на 1. В таблице встречаются числа 7 и -9 ровно по одному разу. Сколько раз встречается число 0?

Ответ: 8.

Решение. Рассмотрим кратчайший путь по клеткам из клетки с числом -9 в клетку с числом 7. Заметим, что на этом пути встречаются все целые числа от -9 до 7. Следовательно, этот путь состоит хотя бы из 17 клеток. Но если кратчайший путь из клетки в клетку в таблице 8×10 имеет длину 17, то эти клетки находятся в противоположных углах таблицы.

После этого замечания расстановка чисел в таблице однозначно восстанавливается:

-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7

$\square$

Задача 2/1. Маша задумала три различные ненулевые цифры — A, B и C. Оказалось, что среднее арифметическое чисел $\overline{ABC}$, $\overline{BC}$ и C равно 123. Найдите сумму цифр, загаданных Машей.

Запись $\overline{XYZ}$ означает трёхзначное число, составленное из цифр X, Y и Z. Среднее арифметическое трёх чисел a, b, c вычисляется по формуле $\frac{a+b+c}{3}$.

Ответ: 13.

Решение. Заметим, что

$$\overline{ABC} + \overline{BC} + C = (100A + 10B + C) + (10B + C) + C = 100A + 20B + 3C\,.$$

По условию задачи это выражение в три раза больше, чем 123. Получаем уравнение:

$$100A + 20B + 3C = 369\,.$$

Заметим, что число $3C$ заканчивается цифрой 9, только если $C = 3$. Получается

$$100A + 20B + 9 = 369\,;$$
$$10A + 2B = 36\,.$$

Остаётся рассмотреть два случая: $B = 3$ и $B = 8$. В первом случае $B = C$, что противоречит условию. Во втором случае $A = 2$. □

Задача 2/2. Маша задумала три различные ненулевые цифры — A, B и C. Оказалось, что среднее арифметическое чисел $\overline{ABC}$, $\overline{BC}$ и C равно 342. Найдите сумму цифр, загаданных Машей.

Запись $\overline{XYZ}$ означает трёхзначное число, составленное из цифр X, Y и Z. Среднее арифметическое трёх чисел a, b, c вычисляется по формуле $\frac{a+b+c}{3}$.

Ответ: 17.

Решение. Заметим, что

$$\overline{ABC} + \overline{BC} + C = (100A + 10B + C) + (10B + C) + C = 100A + 20B + 3C\,.$$

По условию задачи это выражение в три раза больше, чем 342. Получаем уравнение:

$$100A + 20B + 3C = 1026\,.$$

Заметим, что число $3C$ заканчивается цифрой 6, только если $C = 2$. Получается

$$100A + 20B + 6 = 1026\,;$$
$$10A + 2B = 102\,.$$

Остаётся рассмотреть два случая: $B = 1$ и $B = 6$. В первом случае $A = 10$, что противоречит условию. Во втором случае $A = 9$. □

Задача 2/3. Маша задумала три различные ненулевые цифры — A, B и C. Оказалось, что среднее арифметическое чисел $\overline{ABC}$, $\overline{BC}$ и C равно 182. Найдите сумму цифр, загаданных Машей.

Запись $\overline{XYZ}$ означает трёхзначное число, составленное из цифр X, Y и Z. Среднее арифметическое трёх чисел a, b, c вычисляется по формуле $\frac{a+b+c}{3}$.

Ответ: 13.

Решение. Заметим, что

$$\overline{ABC} + \overline{BC} + C = (100A + 10B + C) + (10B + C) + C = 100A + 20B + 3C\,.$$

По условию задачи это выражение в три раза больше, чем 182. Получаем уравнение:

$$100A + 20B + 3C = 546\,.$$

Заметим, что число $3C$ заканчивается цифрой 6, только если $C = 2$. Получается, что

$$100A + 20B + 6 = 546\,;$$
$$10A + 2B = 54\,.$$

Остаётся рассмотреть два случая: $B = 2$ и $B = 7$. В первом случае $B = C$, что противоречит условию. Во втором случае $A = 4$. □

Задача 3/1. Андрей написал на трёх карточках числа 20, 24 и 35 и перевернул их чистыми сторонами вверх. Затем Лёня написал на каждой карточке по простому числу. Для каждой карточки они нашли сумму написанных на ней чисел. Оказалось, что эти суммы одинаковые. Чему равняется сумма всех шести чисел, написанных на карточках?

Ответ: 111.

Решение. Так как среди чисел 20, 24 и 35 есть как чётные, так и нечётные, то среди простых должны быть как чётные, так и нечётные. Получается, среди простых обязательно встретится двойка, но это наименьшее простое число, и она может быть написана только на карточке с наибольшим числом, то есть 35. Тогда сумма чисел на каждой карточке равна 37, а общая сумма чисел равна 111. □

Задача 3/2. Андрей написал на трёх карточках числа 20, 32 и 41 и перевернул их чистыми сторонами вверх. Затем Лёня написал на каждой карточке по простому числу. Для каждой карточки они нашли сумму написанных на ней чисел. Оказалось, что эти суммы одинаковые. Чему равняется сумма всех шести чисел, написанных на карточках?

Ответ: 129.

Решение. Так как среди чисел 20, 32 и 41 есть как чётные, так и нечётные, то среди простых должны быть как чётные, так и нечётные. Получается, среди простых обязательно встретится двойка, но это наименьшее простое число, и она может быть написана только на карточке с наибольшим числом, то есть 41. Тогда сумма чисел на каждой карточке равна 43, а общая сумма чисел равна 129. □

Задача 3/3. Андрей написал на трёх карточках числа 20, 34 и 49 и перевернул их чистыми сторонами вверх. Затем Лёня написал на каждой карточке по простому числу. Для каждой карточки они нашли сумму написанных на ней чисел. Оказалось, что эти суммы одинаковые. Чему равняется сумма всех шести чисел, написанных на карточках?

Ответ: 153.

Решение. Так как среди чисел 20, 34 и 49 есть как чётные, так и нечётные, то среди простых должны быть как чётные, так и нечётные. Получается, среди простых обязательно встретится двойка, но это наименьшее простое число, и она может быть написана только на карточке с наибольшим числом, то есть 49. Тогда сумма чисел на каждой карточке равна 51, а общая сумма чисел равна 153. □

Задача 4/1. Два марафонца бегают между посёлками А и Б. Они стартуют одновременно. Первый начинает из посёлка А и бежит в посёлок Б, второй начинает из Б и бежит в А. Каждый раз, когда марафонец добегает до посёлка, он сразу же разворачивается и бежит обратно. Известно, что первый марафонец пробегает расстояние от А до Б за 20 минут, а второй — за 15 минут. Через сколько минут после старта один из марафонцев впервые поравняется с другим, догнав его (возможно, в одном из посёлков)?

Ответ: 60.

Решение. Пусть расстояние между посёлками равно S. Тогда скорости марафонцев равны $\frac{S}{20}$ и $\frac{S}{15}$ соответственно.

Марафонец, имеющий скорость $\frac{S}{15}$, быстрее, поэтому именно он догонит другого. К тому моменту он пробежит расстояние на S большее, чем пробежит другой марафонец. При этом их скорость сближения равна $\frac{S}{15} - \frac{S}{20}$.

Получается, искомое время можно найти следующим образом

$$S : \left(\frac{S}{15} - \frac{S}{20}\right) = S : \frac{S}{60} = 60\,. \qquad \square$$

Задача 4/2. Два марафонца бегают между посёлками А и Б. Они стартуют одновременно. Первый начинает из посёлка А и бежит в посёлок Б, второй начинает из Б и бежит в А. Каждый раз, когда марафонец добегает до посёлка, он сразу же разворачивается и бежит обратно. Известно, что первый марафонец пробегает расстояние от А до Б за 20 минут, а второй — за 24 минуты. Через сколько минут после старта один из марафонцев впервые поравняется с другим, догнав его (возможно, в одном из посёлков)?

Ответ: 120.

Решение. Пусть расстояние между посёлками равно S. Тогда скорости марафонцев равны $\frac{S}{20}$ и $\frac{S}{24}$ соответственно.

Марафонец, имеющий скорость $\frac{S}{20}$, быстрее, поэтому именно он догонит другого. К тому моменту он пробежит расстояние на S большее, чем пробежит другой марафонец. При этом их скорость сближения равна $\frac{S}{20} - \frac{S}{24}$.

Получается, искомое время можно найти следующим образом

$$S : \left(\frac{S}{20} - \frac{S}{24}\right) = S : \frac{S}{120} = 120\,. \qquad \square$$

Задача 4/3. Два марафонца бегают между посёлками А и Б. Они стартуют одновременно. Первый начинает из посёлка А и бежит в посёлок Б, второй начинает из Б и бежит в А. Каждый раз, когда марафонец добегает до посёлка, он сразу же разворачивается и бежит обратно. Известно, что первый марафонец пробегает расстояние от А до Б за 20 минут, а второй — за 25 минут. Через сколько минут после старта один из марафонцев впервые поравняется с другим, догнав его (возможно, в одном из посёлков)?

Ответ: 100.

Решение. Пусть расстояние между посёлками равно S. Тогда скорости марафонцев равны $\frac{S}{20}$ и $\frac{S}{25}$ соответственно.

Марафонец, имеющий скорость $\frac{S}{20}$, быстрее, поэтому именно он догонит другого. К тому моменту он пробежит расстояние на S большее, чем пробежит другой марафонец. При этом их скорость сближения равна $\frac{S}{20} - \frac{S}{25}$.

Получается, искомое время можно найти следующим образом

$$S : \left(\frac{S}{20} - \frac{S}{25}\right) = S : \frac{S}{100} = 100\,. \qquad \square$$

Задача 5/1. Однажды Андрей, Боря и Вася гуляли со своей мамой и увидели автомат по продаже жевательных резинок, в котором содержатся резинки трёх цветов: красного, желтого и зеленого. Любая резинка стоит 10 рублей. Ребята попросили маму, чтобы она каждому из них купила по резинке, и чтобы они были одного цвета. Мама опускала монеты в автомат, пока не смогла исполнить желание детей. Затем ещё три дня подряд мама исполняла такое же желание своих детей. Какую сумму денег необходимо было иметь маме, чтобы гарантированно исполнять желание детей четыре дня подряд? Невыданные детям жевательные резинки оставались у мамы до следующих покупок.

Ответ: 160.

Решение. Заметим, что в последний день у мамы останется не более 4 жвачек (не более чем по две штуки не более чем двух видов жвачек). За прошедшие четыре дня она раздаст ровно 12 жвачек. Итого, она потратит не более 160 рублей.

Приведём пример того, как мама потратит ровно 160 рублей. В первые три дня она вытаскивает по три жвачки красного цвета, а в последний день она сначала вытягивает две красные, затем две жёлтые и в конце три зелёные. □

Задача 5/2. Однажды Андрей, Боря и Вася гуляли со своей мамой и увидели автомат по продаже жевательных резинок, в котором содержатся резинки трёх цветов: красного, желтого и зеленого. Любая резинка стоит 10 рублей. Ребята попросили маму, чтобы она каждому из них купила по резинке, и чтобы они были одного цвета. Мама опускала монеты в автомат, пока не смогла исполнить желание детей. Затем ещё четыре дня подряд мама исполняла такое же желание своих детей. Какую сумму денег необходимо было иметь маме, чтобы гарантированно исполнять желание детей пять дней подряд? Невыданные детям жевательные резинки оставались у мамы до следующих покупок.

Ответ: 190.

Решение. Заметим, что в последний день у мамы останется не более 4 жвачек (не более чем по две штуки не более чем двух видов жвачек). За прошедшие пять дней она раздаст ровно 15 жвачек. Итого, она потратит не более 190 рублей.

Приведём пример того, как мама потратит ровно 190 рублей. В первые четыре дня она вытаскивает по три жвачки красного цвета, а в последний день она сначала вытягивает две красные, затем две жёлтые и в конце три зелёные. □

Задача 5/3. Однажды Андрей, Боря и Вася гуляли со своей мамой и увидели автомат по продаже жевательных резинок, в котором содержатся резинки трёх цветов: красного, желтого и зеленого. Любая резинка стоит 10 рублей. Ребята попросили маму, чтобы она каждому из них купила по резинке, и чтобы они были одного цвета. Мама опускала монеты в автомат, пока не смогла исполнить желание детей. Затем ещё пять дней подряд мама исполняла такое же желание своих детей. Какую сумму денег необходимо было иметь маме, чтобы гарантированно исполнять желание детей шесть дней подряд? Невыданные детям жевательные резинки оставались у мамы до следующих покупок.

Ответ: 220.

Решение. Заметим, что в последний день у мамы останется не более 4 жвачек (не более чем по две штуки не более чем двух видов жвачек). За прошедшие шесть дней она раздаст ровно 18 жвачек. Итого, она потратит не более 220 рублей.

Приведём пример того, как мама потратит ровно 220 рублей. В первые пять дней она вытаскивает по три жвачки красного цвета, а в последний день она сначала вытягивает две красные, затем две жёлтые и в конце три зелёные. □

Задача 6/1. У Лёши есть сто карточек, на которых написаны числа 100, 101, 102, ..., 199. В первый день он выложил их в ряд в порядке возрастания. А во второй день он переложил их так, что любые два соседних числа отличаются ровно одной цифрой, и их разность равна либо 1, либо 10. Какое наибольшее количество карточек могло остаться на своих местах?

Ответ: 50.

Решение. Сначала приведём пример, в котором 51 карточек осталось на своих местах. Жирным выделены карточки, оставшиеся на своих местах.

$$\mathbf{100}, \mathbf{101}, \ldots, \mathbf{109}, 119, 118, \ldots, 110, \mathbf{120}, \mathbf{121}, \ldots, \mathbf{129}, 139, 138, \ldots$$
$$\ldots, 170, \mathbf{180}, \mathbf{181}, \ldots, \mathbf{189}, 199, 198, \ldots, 190$$

(десятки чисел, начинающихся на 10, 12, 14, 16, 18, остались на месте, а остальные десятки «перевернулись»).

Теперь докажем, что больше 50 карточек не могло остаться на своих местах. Заметим, что после перестановки чётность сумм цифр на карточках чередуется, то есть она либо совпадает у всех карточек с чётностью номеров их мест, либо нет. В первоначальной же расстановке чётность сумм цифр совпадала с чётностью номеров их мест ровно в половине случаев. Таким образом, хотя бы половина карточек изменили свои места. □

Задача 6/2. У Лёши есть восемьдесят карточек, на которых написаны числа 200, 201, 202, ..., 279. В первый день он выложил их в ряд в порядке возрастания. А во второй день он переложил их так, что любые два соседних числа отличаются ровно одной цифрой, и их разность равна либо 1, либо 10. Какое наибольшее количество карточек могло остаться на своих местах?

Ответ: 40.

Решение. Сначала приведём пример, в котором 40 карточек осталось на своих местах. Жирным выделены карточки, оставшиеся на своих местах.

$$\mathbf{200}, \mathbf{201}, \ldots, \mathbf{209}, 219, 218, \ldots, 210, \mathbf{220}, \mathbf{221}, \ldots, \mathbf{229}, 239, 238, \ldots$$
$$\ldots, 250, \mathbf{260}, \mathbf{261}, \ldots, \mathbf{269}, 279, 278, \ldots, 270$$

(десятки чисел, начинающихся на 20, 22, 24, 26, остались на месте, а остальные десятки «перевернулись»).

Теперь докажем, что больше 40 карточек не могло остаться на своих местах. Заметим, что после перестановки чётность сумм цифр на карточках чередуется, то есть она либо совпадает у всех карточек с чётностью номеров их мест, либо нет. В первоначальной же расстановке чётность сумм цифр совпадала с чётностью номеров их мест ровно в половине случаев. Таким образом, хотя бы половина карточек изменили свои места. $\square$