Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2020
Заключительный этап.

11 класс

Задача 1. В Курчатовской школе за каждой партой сидит ровно 2 человека. Известно, что ровно у 70% мальчиков сосед по парте — мальчик, а ровно у 40% девочек — девочка. Во сколько раз мальчиков больше чем девочек?

Ответ: в 2 раза.

Решение. Пусть количество мальчиков x, а девочек — y. Заметим, что 30% мальчиков сидит за партами с девочками и 60% девочек сидят за партами с мальчиками. Так как за каждой партой сидит ровно 2 человека, то $0{,}3x = 0{,}6y$, откуда $x = 2y$. Таким образом, мальчиков в 2 раза больше, чем девочек. $\square$

Критерии

7 б. Любое полное решение задачи.

2 б. Приведен частный случай.

1 б. Только верный ответ.

Задача 2. Найдите количество способов раскрасить все натуральные числа от 1 до 20 в синий и красный цвета так, чтобы оба цвета встречались и произведение всех красных чисел было взаимно просто с произведением всех синих чисел.

Ответ: $2^6 - 2 = 62$ способа.

Решение. Заметим, что все чётные числа должны быть одного цвета. Так как среди них содержатся числа 6, 10 и 14, то числа, кратные 3, 5 и 7 должны быть того же цвета. Остались числа 1, 11, 13, 17 и 19. Заметим, что их можно распределить как угодно по двум цветам. Таким образом, у нас есть 6 групп, каждая из которых может быть любого цвета, т. е. всего 2^6 способов раскраски.

Заметим, что из них не подходят 2 варианта, в которых все числа одного цвета. Итого получается $2^6 - 2 = 62$ способа. $\square$

Критерии

Используется один наиболее подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

3 б. Замечено, что чётные числа, а также числа, кратные 3, 5 и 7, должны быть одного цвета.

1 б. Есть верный ответ.

За следующие ошибки во в целом верном решении снижаются баллы:

−1 б. Не учтено, что оба цвета должны встречаться.

−2 б. Не учтено, что оба цвета должны встречаться, и не учтено, что “1” не взаимно простое число.

−2 б. Не учтена альтернативная раскраска, т.е. возможны две пары групп: 1 группа - красная, 2 группа - синяя и 1 группа - синяя, 2 группа - красная.

−1 б. При рассмотрении одноцветных групп пропущено число 1 или одно из простых чисел, больших 10. Если упущено больше одноцветных групп, решение не считается в целом верным.

−3 б. Не учтено, что оба цвета должны встречаться, и не учтена альтернативная раскраска.

Задача 3. На доске написаны числа 2, 3, 5, ..., 2003, 2011, 2017, т. е. все простые числа, не превосходящие 2020. За одну операцию можно заменить два числа a, b на максимальное простое число, не превосходящее $\sqrt{a^2 - ab + b^2}$. После нескольких операций на доске осталось одно число. Какое максимальное значение оно может принимать?

Ответ: Максимальное значение равно 2011.

Решение. Заметим, что если $a < b$, то $a < \sqrt{a^2 - ab + b^2} < b$. Действительно, $a^2 < a^2 - ab + b^2$, так как $ab < b^2$ и $a^2 - ab + b^2 < b^2$, так как $a^2 < ab$.

Таким образом, число 2017 или какое-то большее него не может появиться после какой-то операции. Но последнее число появилось после какой-то операции, поэтому оно не больше 2011.

Отложим число 2017 и будем применять операцию к двум наибольшим оставшимся числам x и y, где $x < y$. Заметим, что так как x и y — это два соседних простых числа, то наибольшее число, не превосходящее $\sqrt{x^2 - xy + y^2}$ — это x. Таким образом, мы каждый раз будем откидывать самое большое из наших чисел, пока на доске не останутся числа 2 и 2017.

Теперь применим операцию к числам 2 и 2017. Заметим, что $2017^2 - 2 \cdot 2017 + 2^2 > 2011^2$, поэтому в результате этой операции на доске окажется число 2011. $\square$

Замечание. Неравенство $a < \sqrt{a^2 - ab + b^2} < b$ при $a < b$ можно доказать геометрически. Дело в том, что в треугольнике со сторонами a и b и углом 60° между ними длина третьей стороны равна как раз $\sqrt{a^2 - ab + b^2}$. А так как угол 60° всегда средний по величине в своем треугольнике, то и лежащая напротив него сторона также средняя по величине.

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

3 б. Показано, как получить 2011, но не доказано, что нельзя получить большее число.

4 б. Доказано, что число, большее 2011, получить нельзя.

Задача 4. Пусть $SABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида с основанием $ABCD$. На отрезке AC нашлась точка M такая, что $SM = MB$ и плоскости SBM и SAB перпендикулярны. Найдите отношение $AM : AC$.

Ответ: $3 : 4$.

Решение. Обозначим центр основания $ABCD$ за O. Тогда $SO \perp AC$ и $BD \perp AC$, откуда $SB \perp AC$. Это означает, что серединный перпендикуляр к отрезку SB (это плоскость, обозначим её за α) параллелен AC. С другой стороны, из $SM = MB$ следует, что точка M лежит в α. Тогда и вся прямая AC должна содержаться в α. Отсюда получаем $SO = OB$.

Середину SB обозначим за R. Заметим, что RM лежит сразу в двух плоскостях, перпендикулярных SAB — α и SMB. Это означает, что RM и сам перпендикулярен плоскости SAB, а также отрезку RA.

Примем длину $OS = OA = OB = OC = OD$ за 1. Тогда OR является медианой в прямоугольном равнобедренном треугольнике SOB; так как катеты этого треугольника равны по 1, имеем $OR = 1/\sqrt{2}$.

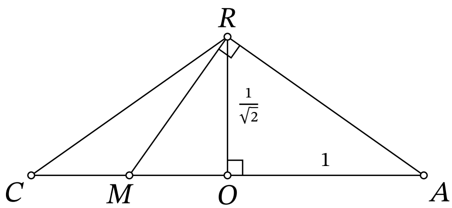

Рис. 1: к решению задачи 4

Наконец, рассмотрим сечение тетраэдра плоскостью α (рис. 1). Треугольник MRA прямоугольный, причём RO в нём — высота к гипотенузе. Имеем $RO^2 = MO \cdot AO$, то есть $(1/\sqrt{2})^2 = MO \cdot 1$, откуда $MO = 1/2$. Получаем $AM = 3/2$ и $AM : AC = 3 : 4$. $\square$

Критерии

- 7 б. Любое полное решение задачи.
- 5 б. Решение с верными геометрическими построениями и доказательствами, но с вычислительной ошибкой в конце решения.
- 5 б. Приведено в целом верное геометрическое решение с верным ответом, в котором доказательство равенства ребер пирамиды содержит неточности.
- 3 б. Приведено геометрическое решение с верным ответом, в котором равенство ребер пирамиды используется, но не доказывается.
- 6 б. Приведено в целом верное координатно-векторное решение с неверным ответом из-за несущественной арифметической ошибки на последнем этапе вычислений.
- 3 б. Приведено идейно верное координатно-векторное решение с неверным ответом из-за вычислительной ошибки в начале или середине решения.
- 1 б. Доказано, что высота, опущенная из точки M в треугольник SBM на BS, является перпендикуляром к плоскости ABS, но в остальном решение неверное.
- 3 б. Доказано, что высота пирамиды равна половине диагонали основания пирамиды, но в остальном решение неверное.
- 4 б. Доказано, что все ребра пирамиды равны, но в остальном решение неверное, либо продвижение несущественно.

Утверждение о том, что боковое ребро пирамиды перпендикулярно скрещивающейся с ним диагонали, считается очевидным; за отсутствие его доказательства баллы не снижаются.

Задача 5. Докажите, что при натуральном $n > 2$ числа от 1 до n можно разбить на два множества так, чтобы произведения чисел в множествах отличались не более чем в $\frac{n-1}{n-2}$ раз.

Решение. Докажем это утверждение индукцией по n.

База при $n = 3, 4, 5$.
При $n = 3$ разобьём на множества $\{1, 2\}$ и $\{3\}$, отношение равно $\frac{3}{2}$, что меньше $\frac{2}{1}$.
При $n = 4$ разобьём на множества $\{1, 2, 3\}$ и $\{4\}$. Отношение будет $\frac{6}{4}$, что как раз равно $\frac{3}{2}$.

При $n = 5$ разобьём на множества $\{1, 2, 5\}$ и $\{3, 4\}$. Отношение равно $\frac{12}{10}$, что меньше $\frac{4}{3}$.

Переход индукции от n к $n+2$ при $n \geqslant 4$. Пусть у нас есть разбиение чисел от 1 до n, удовлетворяющее условию. Добавим в множество с меньшим произведением P_1 число $n+2$, а в множество с бóльшим произведением P_2 число $n+1$. Докажем, что произведения отличаются не более чем в $\frac{n+2-1}{n+2-2} = \frac{n+1}{n}$ раз. Так как $P_1 \leqslant P_2$, то

$$\frac{P_1 \cdot (n+2)}{P_2 \cdot (n+1)} \leqslant \frac{n+2}{n+1} < \frac{n+1}{n}\,.$$

С другой стороны, так как $P_2 \leqslant P_1 \frac{(n-1)}{n-2}$, то

$$\frac{P_2 \cdot (n+1)}{P_1 \cdot (n+2)} \leqslant \frac{(n-1)(n+1)}{(n-2)(n+2)} = \frac{n^2-1}{n^2-4} = 1 + \frac{3}{n^2-4}\,.$$

Докажем, что это не больше $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$. Это равносильно

$$\frac{3}{n^2-4} \leqslant \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad 3n \leqslant n^2 - 4 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 \leqslant n^2 - 3n - 4 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant (n-4)(n+1)\,,$$

что верно при $n \geqslant 4$. Таким образом, переход доказан. □

Критерии

Используется один наиболее подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

5 б. В целом верное решение, но в индукционном переходе не доказывается, что для $P_1 \leqslant P_2$ будет верно $\frac{P_1(n+2)}{P_2(n+1)} < \frac{n+1}{n}$ (то есть из двух неравенств доказано «сложное»).

2 б. Есть идея шага через 2 с домножением меньшего произведения на большее число, а большего произведения на меньшее число.

0 б. Приведены подходящие разбиения для конечного числа конкретных значений n.

Задача 6. Докажите, что существуют такие последовательности натуральных чисел a_n и b_n, что одновременно выполнены следующие условия:

- последовательности a_n и b_n являются неубывающими;
- последовательности $A_n = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}$ и $B_n = \dfrac{1}{b_1} + \dfrac{1}{b_2} + \ldots + \dfrac{1}{b_n}$ неограниченно возрастают;

- последовательность $C_n = \frac{1}{\max(a_1, b_1)} + \frac{1}{\max(a_2, b_2)} + \ldots + \frac{1}{\max(a_n, b_n)}$ ограничена.

Решение. Рассмотрим последовательность $c_k = 2^k$. Ясно, что все суммы

$$C_n = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \ldots + \frac{1}{c_n}$$

ограничены. Будем строить исходные последовательности a_n и b_n так, чтобы $\max(a_n, b_n) = c_n$. Последовательно разобьём натуральный ряд на отрезки подряд идущих чисел так, что если отрезок начинается с числа k, то его длина равна c_k. После этого раскрасим все эти отрезки поочередно в красный и синий цвета.

Теперь зададим последовательность a_n следующим образом:

- если n — красное число, то положим a_n равным числу c_n;
- если n — синее число, то положим a_n равным c_k, где k — первое число отрезка, содержащего n.

Последовательность b_n зададим аналогично, но инвертируя цвета:

- если n — синее число, то положим b_n равным числу c_n;
- если n — красное число, то положим b_n равным c_k, где k — первое число отрезка, содержащего n.

Заметим, что для каждого синего отрезка сумма обратных значений последовательности a_n на нём равна 1, поэтому последовательность сумм $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}$ не ограничена сверху. Аналогично, для последовательности b_n сумма обратных значений на каждом красном отрезке равна 1, поэтому последовательность сумм $\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_n}$ не ограничена сверху. □

Критерии

Используется один наиболее подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

4 б. Предъявлены подходящие последовательности, но не доказано, почему они подходят.