Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2020
Заключительный этап
10 класс

Задача 1. Найдите такие два числа a и b, что b получается из a перестановкой цифр, причём $a - b$ состоит только из цифр 1.

Ответ: например, 234567809 и 345678920.

Критерии

Любой верный пример оценивается в 7 баллов.

Задача 2. В таблице 3×3 расставили натуральные числа (не обязательно различные) так, что суммы во всех строках и столбцах получились различными. Какое минимальное значение может принимать сумма чисел в таблице?

Ответ: 17.

Решение. Заметим, что в каждой строке и столбце сумма чисел не меньше 3. Тогда удвоенная сумма чисел во всей таблице, равная сумме сумм чисел в строках и столбцах, не меньше $3 + 4 + \ldots + 8 = 33$, поэтому просто сумма чисел в таблице не меньше 17.

Пример таблицы с суммой 17:

1	1	1
1	2	2
2	3	4

□

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

4 б. Доказано, что сумма чисел в таблице не меньше 17.

3 б. Приведён пример таблицы с суммой 17.

Задача 3. В вершинах правильного 2019-угольника расставили числа так, что сумма чисел в любых девяти подряд идущих вершинах равна 300. Известно, что в 19-й вершине стоит число 19, а в 20-й — число 20. Какое число стоит в 2019-й вершине?

Ответ: 61.

Решение. Обозначим числа в вершинах за x_1, x_2, ..., x_{2019}. Так как сумма любых девяти подряд идущих чисел одинаковая, то числа, стоящие через 8 других, равны. Отсюда $x_1 = x_{10} = x_{19} = \ldots = x_{1+9k} = \ldots$. Так как 2019 не делится на 9, но делится на 3, то при продолжении этой цепочки по циклу в неё войдут все числа вида x_{3k+1}. Аналогичные цепочки можно построить от чисел x_2 и x_3. Получается, что числа, стоящие в вершинах, имеющих одинаковые остатки при делении на 3, равны.

Так как каждая девятка подряд идущих чисел содержит три набора вершин с разными остатками от деления на 3, то сумма чисел в каждом таком наборе равна 100. Заметим, что 19 даёт остаток 1 при делении на 3, 20 даёт остаток 2, а 2019 даёт остаток 0, поэтому число, записанное в вершине 2019, равно $100 - 19 - 20 = 61$. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

4 б. Доказано, что числа, идущие через 2, равны.

1 б. Замечено, что числа, идущие через 8, равны.

Задача 4. У Поликарпа есть 2 коробки, в первой из которых лежит n монет, а вторая пустая. За один ход он может либо переложить одну монету из первой коробки во вторую, либо убрать из первой коробки ровно k монет, где k — количество монет во второй коробке. При каких n Поликарп может сделать первую коробку пустой не более чем за 10 ходов?

Ответ: при n от 0 до 30 включительно.

Решение. Назовём ход, при котором перекладывается одна монета из первой коробки во вторую, ходом *первого типа,* а ход, при котором монеты убираются из первой коробки — ходом *второго типа.* Пусть всего было сделано x ходов первого типа и y ходов второго типа. Тогда во второй коробке не больше x монет. Поэтому при выполнении ходов второго типа мы заберём из первой коробки не более xy монет, значит, в сумме заберём не более $x + xy$ монет. Так как $x + y \leqslant 10$, то

$$x + xy \leqslant x + x(10 - x) = -x^2 + 11x\,.$$

При целочисленных значениях x максимум этого выражения достигается в точках $x = 5$ и $x = 6$ и равен $5 \cdot 6 = 30$. Таким образом, $n \leqslant 30$. Докажем, что любое $n \leqslant 30$ подходит.

Если сделать 5 ходов первого типа, а после этого 5 ходов второго типа, то мы уберём из первой коробки ровно 30 монет. Выпишем последовательность из 1 и 2, где 1 обозначает ход первого типа, а 2 — ход второго типа. Заметим, что если в этой последовательности поменять соседнюю пару 12 на пару 21, то итоговое количество монет, извлечённых из первой коробки, уменьшится на 1. Так мы можем делать, пока все 2 не окажутся слева, а все 1 — справа. Теперь будем заменять 1 на 2, и на каждом шаге количество извлечённых монет с помощью такой последовательности операций тоже будет уменьшаться на 1. Таким образом, для любого n от 0 до 30 мы можем предъявить нужную последовательность операций. □

Критерии

Используется один наибольший подходящий критерий:

7 б. Любое полное решение задачи.

Если в решении n считается натуральным, и в ответе не упомянуто число 0, то балл не снижается.

4 б. Доказано, что n не превышает 30, но не объяснено, почему все меньшие n тоже подходят.

3 б. Описаны все примеры для n от 1 до 30.

За следующую ошибку в решении, которое в остальном подходит под один из критериев выше, снижается балл:

−1 б. Максимальное значение выражения $-x^2+11x$ при целых x найдено неверно из-за арифметической ошибки.

Задача 5. Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Точка G такова, что четырёхугольник $ABGH$ — параллелограмм. Пусть I — такая точка на прямой GH, что AC делит HI пополам. Прямая AC пересекает описанную окружность треугольника GCI в точках C и J. Докажите, что $IJ = AH$.

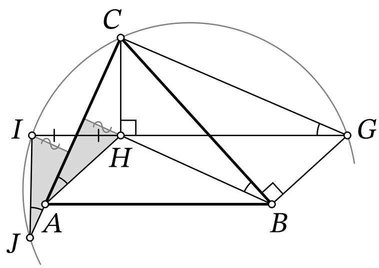

Рис. 4: к решению задачи 5

Решение. Заметим, что нам достаточно доказать $\angle IJC = \angle CAH$. Действительно, если мы это установим, то можно будет опустить перпендикуляры II_1 и HH_1

на AC — они окажутся равны, так как IH делится прямой AC пополам — и получить равенство прямоугольных треугольников JI_1I и AH_1H по углу и катету (рис. 4).

Так как $JICG$ — вписанный четырёхугольник, то $\angle IJC = \angle IGC$. Далее, $CH \perp AB \parallel HG$ и $CB \perp AH \parallel BG$, откуда $\angle CHG = \angle CBG = 90°$, то есть четырёхугольник $CHBG$ также вписанный. Отсюда имеем $\angle IGC = \angle HGC = \angle HBC$.

Наконец, углы HBC и CAH равны, так как это углы между сторонами и высотами, и оба они дополняют угол C треугольника до $90°$. □

Критерии

Любое полное решение задачи оценивается в 7 баллов. В отсутствие такого решения следующие критерии *суммируются:*

1 б. Задача *сведена к* доказательству того, что углы IJC и CAH равны, но равенство этих углов не доказано.

1 б. Доказана вписанность четырёхугольника $CHBG$.