10-11 классы

Задача 1/1. Про положительные числа a и b известно, что $a > b$ и $a^2 - 8b^2 = 2ab$. Чему может равняться $\frac{5b+a}{5b-a}$?

Ответ: 9.

Решение. Поделим уравнение $a^2 - 8b^2 = 2ab$ на b^2, получим уравнение $\frac{a^2}{b^2} - 8 = \frac{2a}{b}$. Тогда $\frac{a}{b}$ равно либо 4, либо -2, но второй вариант нам не подходит, так как a и b — положительные числа. Следовательно, $a = 4b$. Имеем

$$\frac{5b+a}{5b-a} = \frac{5b+4b}{5b-4b} = 9\,. \qquad \square$$

Задача 1/2. Про положительные числа a и b известно, что $a > b$ и $a^2 - 12b^2 = -ab$. Чему может равняться $\frac{4b+a}{4b-a}$?

Ответ: 7.

Решение. Поделим уравнение $a^2-12b^2 = -ab$ на b^2, получим уравнение $\frac{a^2}{b^2}-12 = -\frac{a}{b}$. Тогда $\frac{a}{b}$ равно либо 3, либо -4, но второй вариант нам не подходит, так как a и b — положительные числа. Следовательно, $a = 3b$. Имеем

$$\frac{4b+a}{4b-a} = \frac{4b+3b}{4b-3b} = 7\,. \qquad \square$$

Задача 1/3. Про положительные числа a и b известно, что $a > b$ и $a^2 - 10b^2 = 3ab$. Чему может равняться $\frac{6b+a}{6b-a}$?

Ответ: 11.

Решение. Поделим уравнение $a^2-10b^2 = 3ab$ на b^2, получим уравнение $\frac{a^2}{b^2}-10 = \frac{3a}{b}$. Тогда $\frac{a}{b}$ равно либо 5, либо -2, но второй вариант нам не подходит, так как a и b — положительные числа. Следовательно, $a = 5b$. Имеем

$$\frac{6b+a}{6b-a} = \frac{6b+5b}{6b-5b} = 11\,. \qquad \square$$

Задача 1/4. Про положительные числа a и b известно, что $a > b$ и $a^2 - 12b^2 = 4ab$. Чему может равняться $\frac{7b+a}{7b-a}$?

Ответ: 13.

Решение. Поделим уравнение $a^2-12b^2 = 4ab$ на b^2, получим уравнение $\frac{a^2}{b^2}-12 = \frac{4a}{b}$. Тогда $\frac{a}{b}$ равно либо 6, либо -2, но второй вариант нам не подходит, так как a и b — положительные числа. Следовательно, $a = 6b$. Имеем

$$\frac{7b+a}{7b-a} = \frac{7b+6b}{7b-6b} = 13\,. \qquad \square$$

Задача 2/1. На острове Невезения живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды каждый житель острова отправил письмо каждому другому. Оказалось, что в 26 письмах написана фраза «Ты рыцарь!», а в 30 оставшихся — «Ты лжец!». Сколько рыцарей могло жить на острове Невезения? Дайте наибольший возможный ответ.

Ответ: 5.

Решение. Если на острове живёт n человек, то всего было отправлено $n(n-1)$ писем, а по условию это число равно $26+30=56$. Следовательно, на острове живёт 8 человек.

Пусть x — количество рыцарей, живущих на острове, тогда лжецов там $8-x$. Фраза «Ты рыцарь!» могла быть написана только в письмах от рыцаря к рыцарю или от лжеца к лжецу. Получается уравнение

$$x(x-1)+(8-x)(7-x)=26\,;$$
$$x^2-x+56-15x+x^2=26\,;$$
$$x^2-8x+15=0\,.$$

Таким образом, либо $x=3$, либо $x=5$. Нетрудно проверить, что оба случая нам подходят. □

Задача 2/2. На острове Невезения живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды каждый житель острова отправил письмо каждому другому. Оказалось, что в 42 письмах написана фраза «Ты рыцарь!», а в 48 оставшихся — «Ты лжец!». Сколько рыцарей могло жить на острове Невезения? Дайте наибольший возможный ответ.

Ответ: 6.

Решение. Если на острове живёт n человек, то всего было отправлено $n(n-1)$ писем, а по условию это число равно $42+48=90$. Следовательно, на острове живёт 10 человек.

Пусть x — количество рыцарей, живущих на острове, тогда лжецов там $10-x$. Фраза «Ты рыцарь!» могла быть написана только в письмах от рыцаря к рыцарю или от лжеца к лжецу. Получается уравнение

$$x(x-1)+(10-x)(9-x)=42\,;$$
$$x^2-x+90-19x+x^2=42\,;$$
$$x^2-10x+24=0\,.$$

Таким образом, либо $x=4$, либо $x=6$. Нетрудно проверить, что оба случая нам подходят. □

Задача 2/3. На острове Невезения живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды каждый житель острова отправил письмо каждому другому. Оказалось, что в 44 письмах написана фраза «Ты рыцарь!», а в 28 оставшихся — «Ты лжец!». Сколько рыцарей могло жить на острове Невезения? Дайте наибольший возможный ответ.

Ответ: 7.

Решение. Если на острове живёт n человек, то всего было отправлено $n(n-1)$ писем, а по условию это равно $44 + 28 = 72$. Следовательно, на острове живёт 9 человек.

Пусть x — количество рыцарей, живущих на острове, тогда лжецов там $9 - x$. Фраза «Ты рыцарь!» могла быть написана только в письмах от рыцаря к рыцарю или от лжеца к лжецу. Получается уравнение

$$x(x-1) + (9-x)(8-x) = 44\,;$$
$$x^2 - x + 72 - 17x + x^2 = 44\,;$$
$$x^2 - 9x + 14 = 0\,.$$

Таким образом, либо $x = 2$, либо $x = 7$. Нетрудно проверить, что оба случая нам подходят. □

Задача 2/4. На острове Невезения живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Однажды каждый житель острова отправил письмо каждому другому. Оказалось, что в 58 письмах написана фраза «Ты рыцарь!», а в 32 оставшихся — «Ты лжец!». Сколько рыцарей могло жить на острове Невезения? Дайте наибольший возможный ответ.

Ответ: 8.

Решение. Если на острове живёт n человек, то всего было отправлено $n(n-1)$ писем, а по условию это равно $58 + 32 = 90$. Следовательно, на острове живёт 10 человек.

Пусть x — количество рыцарей, живущих на острове, тогда лжецов там $10 - x$. Фраза «Ты рыцарь!» могла быть написана только в письмах от рыцаря к рыцарю или от лжеца к лжецу. Получается уравнение

$$x(x-1) + (10-x)(9-x) = 58\,;$$
$$x^2 - x + 90 - 19x + x^2 = 58\,;$$
$$x^2 - 10x + 16 = 0\,.$$

Таким образом, либо $x = 2$, либо $x = 8$. Нетрудно проверить, что оба случая нам подходят. □

Задача 3/1. В ряд выписано 10 натуральных чисел. Известно, что любые два соседних числа отличаются ровно на один. Сколько различных значений может принимать сумма чисел, если известно, что среди них есть хотя бы одна единица?

Ответ: 21.

Решение. Заметим, что минимальная сумма достигается ровно тогда, когда единицы и двойки чередуются. Таким образом, минимальная сумма равна 15. Максимальная сумма будет достигаться, если встречаются все числа от 1 до 10, то есть она равна 55.

Все числа можно разбить на пары: первое и второе, третье и четвёртое, ... В каждой паре сумма чисел нечётна, тогда общая сумма чисел тоже нечётна.

Покажем, как можно получить любую нечётную сумму в диапазоне от 15 до 55. Запустим следующий процесс:

- В начале выписана следующая последовательность чисел: 1, 2, 1, 2, ..., 1, 2.
- Если числа не стоят в порядке возрастания, то найдётся число, не стоящее в начале ряда, чьи соседи (или сосед, если это последнее число) больше него. Тогда увеличим это число на 2.

Заметим, что алгоритм закончит работу, когда будут выписаны числа 1, 2, 3, 4, ..., 9, 10, при этом сумма пробежит все нечётные значения от 15 до 55, а их ровно 21. □

Задача 3/2. В ряд выписано 12 натуральных чисел. Известно, что любые два соседних числа отличаются ровно на один. Сколько различных значений может принимать сумма чисел, если известно, что среди них есть хотя бы одна единица?

Ответ: 31.

Решение. Заметим, что минимальная сумма достигается ровно тогда, когда единицы и двойки чередуются. Таким образом, минимальная сумма равна 18. Максимальная сумма будет достигаться, если встречаются все числа от 1 до 12, то есть она равна 78.

Все числа можно разбить на пары: первое и второе, третье и четвёртое, ... В каждой паре сумма чисел нечётна, тогда общая сумма чисел чётна.

Покажем, как можно получить любую чётную сумму в диапазоне от 18 до 78. Запустим следующий процесс:

- В начале выписана следующая последовательность чисел: 1, 2, 1, 2, ..., 1, 2.

- Если числа не стоят в порядке возрастания, то найдётся число, не стоящее в начале ряда, чьи соседи (или сосед, если это последнее число) больше него. Тогда увеличим это число на 2.

Заметим, что алгоритм закончит работу, когда будут выписаны числа 1, 2, 3, 4, …, 11, 12, при этом сумма пробежит все нечётные значения от 18 до 78, а их ровно 31. □

Задача 3/3. В ряд выписано 14 натуральных чисел. Известно, что любые два соседних числа отличаются ровно на один. Сколько различных значений может принимать сумма чисел, если известно, что среди них есть хотя бы одна единица?

Ответ: 43.

Решение. Заметим, что минимальная сумма достигается ровно тогда, когда единицы и двойки чередуются. Таким образом, минимальная сумма равна 21. Максимальная сумма будет достигаться, если встречаются все числа от 1 до 14, то есть она равна 105.

Все числа можно разбить на пары: первое и второе, третье и четвёртое, … В каждой паре сумма чисел нечётна, тогда общая сумма чисел тоже нечётна.

Покажем, как можно получить любую нечётную сумму в диапазоне от 21 до 105. Запустим следующий процесс:

- В начале выписана следующая последовательность чисел: 1, 2, 1, 2, …, 1, 2.
- Если числа не стоят в порядке возрастания, то найдётся число, не стоящее в начале ряда, чьи соседи (или сосед, если это последнее число) больше него. Тогда увеличим это число на 2.

Заметим, что алгоритм закончит работу, когда будут выписаны числа 1, 2, 3, 4, …, 13, 14, при этом сумма пробежит все нечётные значения от 21 до 105, а их ровно 43. □

Задача 4/1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A проведена высота AH. На отрезке BH отмечена точка K, а на отрезке CH — точка M так, что $BK : KH = 1 : 2$ и $CM : MH = 1 : 5$. Точка O — точка пересечения высот треугольника AKM. Найдите $AO : OH$.

Ответ: 0,8.

Решение. Решим задачу для общего случая. Пусть $\frac{KH}{KB} = k$, $\frac{HM}{MC} = n$, $BK = x$, $CM = y$ (рис. 4).

Высота AH к гипотенузе прямоугольного треугольника равна

$$\sqrt{BH \cdot CH} = \sqrt{xy(k+1)(n+1)}\,.$$

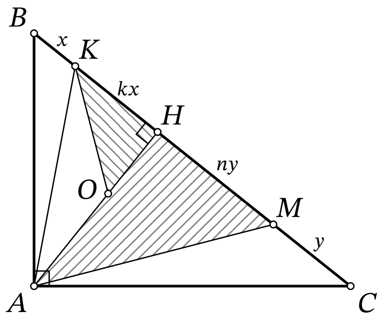


Рис. 4: к решению задачи 4/1

Прямоугольные треугольники KOH и AMH подобны, тогда

$$\frac{OH}{KH} = \frac{HM}{AH};$$

$$\frac{OH}{kx} = \frac{ny}{\sqrt{xy(k+1)(n+1)}};$$

$$OH = \frac{knxy}{\sqrt{xy(k+1)(n+1)}};$$

$$\frac{AO}{OH} = \frac{AH - OH}{OH} = \frac{\sqrt{xy(k+1)(n+1)} - \dfrac{knxy}{\sqrt{xy(k+1)(n+1)}}}{\dfrac{knxy}{\sqrt{xy(k+1)(n+1)}}} =$$

$$= \frac{xy(k+1)(n+1) - knxy}{knxy} = \frac{n+k+1}{kn}.$$

По условию задачи $k = \frac{KH}{KB} = 2$, $n = \frac{HM}{MC} = 5$, тогда $\frac{AO}{OH} = 0{,}8$. □

Задача 4/2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A проведена высота AH. На отрезке BH отмечена точка K, а на отрезке CH — точка M так, что $BK : KH = 1 : 4$ и $CM : MH = 1 : 5$. Точка O — точка пересечения высот треугольника AKM. Найдите $AO : OH$.

Ответ: 0,5.

Решение. Решим задачу для общего случая. Пусть $\frac{KH}{KB} = k$, $\frac{HM}{MC} = n$, $BK = x$, $CM = y$ (рис. 5).

Высота AH к гипотенузе прямоугольного треугольника равна

$$\sqrt{BH \cdot CH} = \sqrt{xy(k+1)(n+1)}.$$

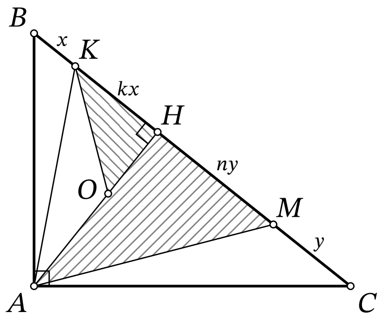


Рис. 5: к решению задачи 4/2

Прямоугольные треугольники KOH и AMH подобны, тогда

$$\frac{OH}{KH} = \frac{HM}{AH};$$

$$\frac{OH}{kx} = \frac{ny}{\sqrt{xy(k+1)(n+1)}};$$

$$OH = \frac{knxy}{\sqrt{xy(k+1)(n+1)}};$$

$$\frac{AO}{OH} = \frac{AH-OH}{OH} = \frac{\sqrt{xy(k+1)(n+1)} - \frac{knxy}{\sqrt{xy(k+1)(n+1)}}}{\frac{knxy}{\sqrt{xy(k+1)(n+1)}}} =$$

$$= \frac{xy(k+1)(n+1) - knxy}{knxy} = \frac{n+k+1}{kn}.$$

По условию задачи $k = \frac{KH}{KB} = 4$, $n = \frac{HM}{MC} = 5$, тогда $\frac{AO}{OH} = 0{,}5$. □

Задача 4/3. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A проведена высота AH. На отрезке BH отмечена точка K, а на отрезке CH — точка M так, что $BK : KH = 1 : 2$ и $CM : MH = 1 : 10$. Точка O — точка пересечения высот треугольника AKM. Найдите $AO : OH$.

Ответ: 0,65.

Решение. Решим задачу для общего случая. Пусть $\frac{KH}{KB} = k$, $\frac{HM}{MC} = n$, $BK = x$, $CM = y$ (рис. 6).

Высота AH к гипотенузе прямоугольного треугольника равна

$$\sqrt{BH \cdot CH} = \sqrt{xy(k+1)(n+1)}.$$

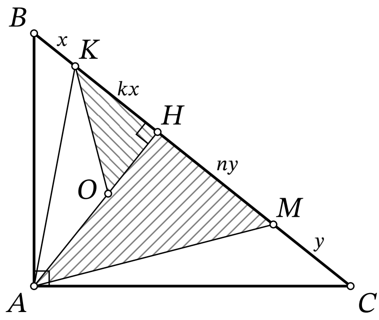


Рис. 6: к решению задачи 4/3

Прямоугольные треугольники KOH и AMH подобны, тогда

$$\frac{OH}{KH} = \frac{HM}{AH};$$

$$\frac{OH}{kx} = \frac{ny}{\sqrt{xy(k+1)(n+1)}};$$

$$OH = \frac{knxy}{\sqrt{xy(k+1)(n+1)}};$$

$$\frac{AO}{OH} = \frac{AH-OH}{OH} = \frac{\sqrt{xy(k+1)(n+1)} - \dfrac{knxy}{\sqrt{xy(k+1)(n+1)}}}{\dfrac{knxy}{\sqrt{xy(k+1)(n+1)}}} =$$

$$= \frac{xy(k+1)(n+1)-knxy}{knxy} = \frac{n+k+1}{kn}.$$

По условию задачи $k = \frac{KH}{KB} = 2$, $n = \frac{HM}{MC} = 10$, тогда $\frac{AO}{OH} = 0{,}65$. □

Задача 4/4. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A проведена высота AH. На отрезке BH отмечена точка K, а на отрезке CH — точка M так, что $BK : KH = 1 : 4$ и $CM : MH = 1 : 10$. Точка O — точка пересечения высот треугольника AKM. Найдите $AO : OH$.

Ответ: 0,375.

Решение. Решим задачу для общего случая. Пусть $\frac{KH}{KB} = k$, $\frac{HM}{MC} = n$, $BK = x$, $CM = y$ (рис. 7).

Высота AH к гипотенузе прямоугольного треугольника равна

$$\sqrt{BH \cdot CH} = \sqrt{xy(k+1)(n+1)}.$$

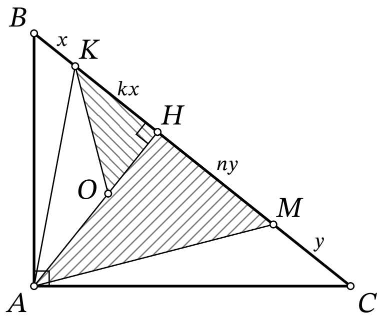


Рис. 7: к решению задачи 4/4

Прямоугольные треугольники KOH и AMH подобны, тогда

$$\frac{OH}{KH} = \frac{HM}{AH};$$

$$\frac{OH}{kx} = \frac{ny}{\sqrt{xy(k+1)(n+1)}};$$

$$OH = \frac{knxy}{\sqrt{xy(k+1)(n+1)}};$$

$$\frac{AO}{OH} = \frac{AH - OH}{OH} = \frac{\sqrt{xy(k+1)(n+1)} - \dfrac{knxy}{\sqrt{xy(k+1)(n+1)}}}{\dfrac{knxy}{\sqrt{xy(k+1)(n+1)}}} =$$

$$= \frac{xy(k+1)(n+1) - knxy}{knxy} = \frac{n+k+1}{kn}.$$

По условию задачи $k = \frac{KH}{KB} = 4$, $n = \frac{HM}{MC} = 10$, тогда $\frac{AO}{OH} = 0{,}375$. □

Задача 5/1. Через точку $(3;9)$ графика функции $y = x^2$ проходят две перпендикулярные прямые: ℓ_1 и ℓ_2. Прямая ℓ_1 пересекает ось Ox в точке $(a;0)$ и вторично пересекает график функции в точке $(b;b^2)$. Прямая ℓ_2 пересекает ось Ox в точке $(c;0)$ и вторично пересекает график функции в точке $(d;d^2)$. Чему равняется $\frac{ac}{bd}$?

Ответ: -9.

Решение. Лемма. Если прямая $y = kx + t$ пересекает график функции в точках с абсциссами x_1 и x_2, а ось абсцисс пересекает в точке $(x_3, 0)$, то $\frac{1}{x_3} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

Доказательство леммы. Заметим, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 = kx + t$. По теореме Виета $x_1 + x_2 = k$, $x_1 x_2 = -t$. При этом x_3 — корень уравнения

$kx + t = 0$. Получаем цепочку равенств

$$\frac{1}{x_3} = \frac{1}{-t/k} = -\frac{k}{t} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\,.$$

Лемма доказана.

Используем лемму для прямых ℓ_1 и ℓ_2. Получаем

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{3} + \frac{1}{b} \quad \text{и} \quad \frac{1}{c} = \frac{1}{3} + \frac{1}{d}\,.$$

Преобразуем:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}\,;$$
$$\frac{3b}{a} = \frac{b^2}{b-a}\,.$$

Нетрудно понять, что $\frac{b^2}{b-a}$ — угловой коэффициент прямой ℓ_1, и он равен $\frac{3b}{a}$. Аналогично, угловой коэффициент ℓ_2 равен $\frac{3d}{c}$. А так как эти прямые перпендикулярны, то произведение их угловых коэффициентов равно -1. Получается, $\frac{ac}{bd} = -9$. □

Задача 5/2. Через точку $(4; 16)$ графика функции $y = x^2$ проходят две перпендикулярные прямые: ℓ_1 и ℓ_2. Прямая ℓ_1 пересекает ось Ox в точке $(a; 0)$ и вторично пересекает график функции в точке $(b; b^2)$. Прямая ℓ_2 пересекает ось Ox в точке $(c; 0)$ и вторично пересекает график функции в точке $(d; d^2)$. Чему равняется $\frac{ac}{bd}$?

Ответ: -16.

Решение. Лемма. Если прямая $y = kx + t$ пересекает график функции в точках с абсциссами x_1 и x_2, а ось абсцисс пересекает в точке $(x_3, 0)$, то $\frac{1}{x_3} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

Доказательство леммы. Заметим, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 = kx + t$. По теореме Виета $x_1 + x_2 = k$, $x_1 x_2 = -t$. При этом x_3 — корень уравения $kx + t = 0$. Получаем цепочку равенств

$$\frac{1}{x_3} = \frac{1}{-t/k} = -\frac{k}{t} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\,.$$

Лемма доказана.

Используем лемму для прямых ℓ_1 и ℓ_2. Получаем

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{4} + \frac{1}{b} \quad \text{и} \quad \frac{1}{c} = \frac{1}{4} + \frac{1}{d}\,.$$

Преобразуем:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}\,;$$
$$\frac{4b}{a} = \frac{b^2}{b-a}\,.$$

Нетрудно понять, что $\frac{b^2}{b-a}$ — угловой коэффициент прямой ℓ_1, и он равен $\frac{4b}{a}$. Аналогично, угловой коэффициент ℓ_2 равен $\frac{4d}{c}$. А так как эти прямые перпендикулярны, то произведение их угловых коэффициентов равно -1. Получается, $\frac{ac}{bd} = -16$. $\square$

Задача 5/3. Через точку $(5; 25)$ графика функции $y = x^2$ проходят две перпендикулярные прямые: ℓ_1 и ℓ_2. Прямая ℓ_1 пересекает ось Ox в точке $(a; 0)$ и вторично пересекает график функции в точке $(b; b^2)$. Прямая ℓ_2 пересекает ось Ox в точке $(c; 0)$ и вторично пересекает график функции в точке $(d; d^2)$. Чему равняется $\frac{ac}{bd}$?

Ответ: -25.

Решение. Лемма. Если прямая $y = kx + t$ пересекает график функции в точках с абсциссами x_1 и x_2, а ось абсцисс пересекает в точке $(x_3, 0)$, то $\frac{1}{x_3} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

Доказательство леммы. Заметим, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 = kx + t$. По теореме Виета $x_1 + x_2 = k$, $x_1 x_2 = -t$. При этом x_3 — корень уравения $kx + t = 0$. Получаем цепочку равенств

$$\frac{1}{x_3} = \frac{1}{-t/k} = -\frac{k}{t} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\,.$$

Лемма доказана.

Используем лемму для прямых ℓ_1 и ℓ_2. Получаем

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{5} + \frac{1}{b} \quad \text{и} \quad \frac{1}{c} = \frac{1}{5} + \frac{1}{d}\,.$$

Преобразуем:

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}\,;$$
$$\frac{5b}{a} = \frac{b^2}{b-a}\,.$$

Нетрудно понять, что $\frac{b^2}{b-a}$ — угловой коэффициент прямой ℓ_1, и он равен $\frac{5b}{a}$. Аналогично, угловой коэффициент ℓ_2 равен $\frac{5d}{c}$. А так как эти прямые перпендикулярны, то произведение их угловых коэффициентов равно -1. Получается, $\frac{ac}{bd} = -25$. $\square$

Задача 5/4. Через точку $(6;36)$ графика функции $y = x^2$ проходят две перпендикулярные прямые: ℓ_1 и ℓ_2. Прямая ℓ_1 пересекает ось Ox в точке $(a;0)$ и вторично пересекает график функции в точке $(b;b^2)$. Прямая ℓ_2 пересекает ось Ox в точке $(c;0)$ и вторично пересекает график функции в точке $(d;d^2)$. Чему равняется $\frac{ac}{bd}$?

Ответ: -36.

Решение. Лемма. Если прямая $y = kx + t$ пересекает график функции в точках с абсциссами x_1 и x_2, а ось абсцисс пересекает в точке $(x_3, 0)$, то $\frac{1}{x_3} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

Доказательство леммы. Заметим, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 = kx + t$. По теореме Виета $x_1 + x_2 = k$, $x_1x_2 = -t$. При этом x_3 — корень уравения $kx + t = 0$. Получаем цепочку равенств

$$\frac{1}{x_3} = \frac{1}{-t/k} = -\frac{k}{t} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\,.$$

Лемма доказана.

Используем лемму для прямых ℓ_1 и ℓ_2. Получаем

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{6} + \frac{1}{b} \quad \text{и} \quad \frac{1}{c} = \frac{1}{6} + \frac{1}{d}\,.$$

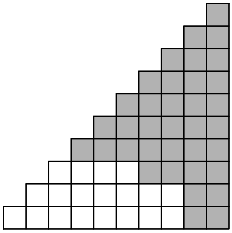
Преобразуем:

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}\,;$$
$$\frac{6b}{a} = \frac{b^2}{b-a}\,.$$

Нетрудно понять, что $\frac{b^2}{b-a}$ — угловой коэффициент прямой ℓ_1, и он равен $\frac{6b}{a}$. Аналогично, угловой коэффициент ℓ_2 равен $\frac{6d}{c}$. А так как эти прямые перпендикулярны, то произведение их угловых коэффициентов равно -1. Получается, $\frac{ac}{bd} = -36$. □

Задача 6/1. В треугольном доме в первом подъезде 1 этаж, во втором подъезде — 2 этажа, в третьем — 3, …, в десятом — 10. Всего в доме 55 квартир — на каждом этаже в каждом подъезде находится ровно одна квартира. Известно, что если в квартире кто-нибудь живёт, то в квартире на этаж выше в том же подъезде тоже кто-нибудь живёт, и квартира на том же этаже, но в следующем по номеру подъезде тоже заселена. Сколько существует таких способов заселить квартиры?

Пример заселения изображен на рисунке, заселённые квартиры отмечены серым. При подсчёте способов заселения каждая квартира считается либо заселённой, либо нет; кто именно в ней живёт, неважно. Случай, когда все квартиры остались пустыми, включается в подсчёт.



Ответ: 1024.

Первое решение. Докажем, что если подъездов n, то способов заселения 2^n; будем рассуждать индукцией по n. База $n = 0$ очевидна.

Пусть утверждение доказано для дома из $n-1$ подъезда; докажем его для дома из n подъездов. Рассмотрим квартиру на первом этаже последнего подъезда. Она либо заселена, либо нет.

В первом случае мы можем выкинуть последний подъезд; ясно, что оставшиеся $n - 1$ подъезд могут быть заселены произвольно согласно правилам задачи, то есть 2^{n-1} способами. Во втором случае мы можем выкинуть первый этаж изо всех подъездов; ясно, что оставшиеся этажи могут быть заселены, опять-таки, 2^{n-1} способами.

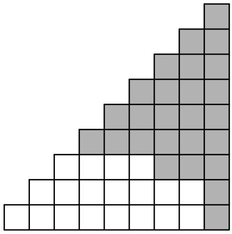
Эти два случая, очевидно, не пересекаются и исчерпывают все возможности. Суммируя их, получаем 2^n. $\square$

Второе решение. Рассмотрим границу между заселёнными и незаселёнными квартирами, которая начинается из правого нижнего угла дома, проходит под всеми заселёнными квартирами и справа от всех незаселённых (считаем, что подъезды были пронумерованы слева направо) и заканчивается на диагональной границе дома. Ясно, что любой способ провести эту линию даст единственный способ заполнить квартиры, и наоборот.

Длина этой линии (измеренная в рёбрах сетки) равна количеству подъездов; при этом каждое её ребро может идти либо влево, либо вверх. Следовательно, количество способов её провести равно соответствующей степени двойки. $\square$

Задача 6/2. В треугольном доме в первом подъезде 1 этаж, во втором подъезде — 2 этажа, в третьем — 3, ..., в девятом — 9. Всего в доме 45 квартир — на каждом этаже в каждом подъезде находится ровно одна квартира. Известно, что если в квартире кто-нибудь живёт, то в квартире на этаж выше в том же подъезде тоже кто-нибудь живёт, и квартира на том же этаже, но в следующем по номеру подъезде тоже заселена. Сколько существует таких способов заселить квартиры?

Пример заселения изображен на рисунке, заселённые квартиры отмечены серым. При подсчёте способов заселения каждая квартира считается либо заселённой, либо нет; кто именно в ней живёт, неважно. Случай, когда все квартиры остались пустыми, включается в подсчёт.



Ответ: 512.

Первое решение. Докажем, что если подъездов n, то способов заселения 2^n; будем рассуждать индукцией по n. База $n = 0$ очевидна.

Пусть утверждение доказано для дома из $n-1$ подъезда; докажем его для дома из n подъездов. Рассмотрим квартиру на первом этаже последнего подъезда. Она либо заселена, либо нет.

В первом случае мы можем выкинуть последний подъезд; ясно, что оставшиеся $n - 1$ подъезд могут быть заселены произвольно согласно правилам задачи, то есть 2^{n-1} способами. Во втором случае мы можем выкинуть первый этаж изо всех подъездов; ясно, что оставшиеся этажи могут быть заселены, опять-таки, 2^{n-1} способами.

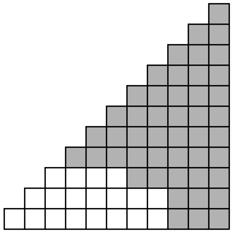
Эти два случая, очевидно, не пересекаются и исчерпывают все возможности. Суммируя их, получаем 2^n. □

Второе решение. Рассмотрим границу между заселёнными и незаселёнными квартирами, которая начинается из правого нижнего угла дома, проходит под всеми заселёнными квартирами и справа от всех незаселённых (считаем, что подъезды были пронумерованы слева направо) и заканчивается на диагональной границе дома. Ясно, что любой способ провести эту линию даст единственный способ заполнить квартиры, и наоборот.

Длина этой линии (измеренная в рёбрах сетки) равна количеству подъездов; при этом каждое её ребро может идти либо влево, либо вверх. Следовательно, количество способов её провести равно соответствующей степени двойки. □

Задача 6/3. В треугольном доме в первом подъезде 1 этаж, во втором подъезде — 2 этажа, в третьем — 3, . . . , в одиннадцатом — 11. Всего в доме 66 квартир — на каждом этаже в каждом подъезде находится ровно одна квартира. Известно, что если в квартире кто-нибудь живёт, то в квартире на этаж выше в том же подъезде тоже кто-нибудь живёт, и квартира на том же этаже, но в следующем по номеру подъезде тоже заселена. Сколько существует таких способов заселить квартиры?

Пример заселения изображен на рисунке, заселённые квартиры отмечены серым. При подсчёте способов заселения каждая квартира считается либо заселённой, либо нет; кто именно в ней живёт, неважно. Случай, когда все квартиры остались пустыми, включается в подсчёт.



Ответ: 2048.

Первое решение. Докажем, что если подъездов n, то способов заселения 2^n; будем рассуждать индукцией по n. База $n = 0$ очевидна.

Пусть утверждение доказано для дома из $n-1$ подъезда; докажем его для дома из n подъездов. Рассмотрим квартиру на первом этаже последнего подъезда. Она либо заселена, либо нет.

В первом случае мы можем выкинуть последний подъезд; ясно, что оставшиеся $n - 1$ подъезд могут быть заселены произвольно согласно правилам задачи, то есть 2^{n-1} способами. Во втором случае мы можем выкинуть первый этаж изо всех подъездов; ясно, что оставшиеся этажи могут быть заселены, опять-таки, 2^{n-1} способами.

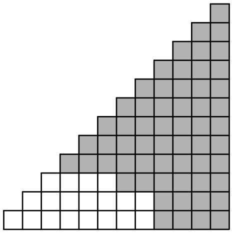
Эти два случая, очевидно, не пересекаются и исчерпывают все возможности. Суммируя их, получаем 2^n. □

Второе решение. Рассмотрим границу между заселёнными и незаселёнными квартирами, которая начинается из правого нижнего угла дома, проходит под всеми заселёнными квартирами и справа от всех незаселённых (считаем, что подъезды были пронумерованы слева направо) и заканчивается на диагональной границе дома. Ясно, что любой способ провести эту линию даст единственный способ заполнить квартиры, и наоборот.

Длина этой линии (измеренная в рёбрах сетки) равна количеству подъездов; при этом каждое её ребро может идти либо влево, либо вверх. Следовательно, количество способов её провести равно соответствующей степени двойки. □

Задача 6/4. В треугольном доме в первом подъезде 1 этаж, во втором подъезде — 2 этажа, в третьем — 3, ..., в двенадцатом — 12. Всего в доме 78 квартир — на каждом этаже в каждом подъезде находится ровно одна квартира. Известно, что если в квартире кто-нибудь живёт, то в квартире на этаж выше в том же подъезде тоже кто-нибудь живёт, и квартира на том же этаже, но в следующем по номеру подъезде тоже заселена. Сколько существует таких способов заселить квартиры?

Пример заселения изображен на рисунке, заселённые квартиры отмечены серым. При подсчёте способов заселения каждая квартира считается либо заселённой, либо нет; кто именно в ней живёт, неважно. Случай, когда все квартиры остались пустыми, включается в подсчёт.



Ответ: 4096.

Первое решение. Докажем, что если подъездов n, то способов заселения 2^n; будем рассуждать индукцией по n. База $n = 0$ очевидна.

Пусть утверждение доказано для дома из $n-1$ подъезда; докажем его для дома из n подъездов. Рассмотрим квартиру на первом этаже последнего подъезда. Она либо заселена, либо нет.

В первом случае мы можем выкинуть последний подъезд; ясно, что оставшиеся $n - 1$ подъезд могут быть заселены произвольно согласно правилам задачи, то есть 2^{n-1} способами. Во втором случае мы можем выкинуть первый этаж изо всех подъездов; ясно, что оставшиеся этажи могут быть заселены, опять-таки, 2^{n-1} способами.

Эти два случая, очевидно, не пересекаются и исчерпывают все возможности. Суммируя их, получаем 2^n. □

Второе решение. Рассмотрим границу между заселёнными и незаселёнными квартирами, которая начинается из правого нижнего угла дома, проходит под всеми заселёнными квартирами и справа от всех незаселённых (считаем, что подъезды были пронумерованы слева направо) и заканчивается на диагональной границе дома. Ясно, что любой способ провести эту линию даст единственный способ заполнить квартиры, и наоборот.

Длина этой линии (измеренная в рёбрах сетки) равна количеству подъездов; при этом каждое её ребро может идти либо влево, либо вверх. Следовательно, количество способов её провести равно соответствующей степени двойки. □