1.3 10–11 классы

1/1. При каком значении k числа $28+k$, $300+k$ и $604+k$ в указанном порядке служат квадратами трех последовательных членов некоторой возрастающей арифметической прогрессии?

1/2. При каком значении k числа $36+k$, $300+k$ и $596+k$ в указанном порядке служат квадратами трех последовательных членов некоторой возрастающей арифметической прогрессии?

1/3. При каком значении k числа $44+k$, $300+k$ и $588+k$ в указанном порядке служат квадратами трех последовательных членов некоторой возрастающей арифметической прогрессии?

2/1. У Пети есть 35 одинаковых кирпичей размера $5\times8\times17$. Петя хочет построить из всех кирпичей одну башню, каждый раз добавляя сверху по одному кирпичу (каждый новый кирпич добавляет 5, 8 или 17 к высоте текущей башни). Назовем число n *построимым,* если Петя может построить башню высоты ровно n. Сколько существует построимых чисел?

2/2. У Васи есть 40 одинаковых кирпичей размера $7\times9\times15$. Вася хочет построить из всех кирпичей одну башню, каждый раз добавляя сверху по одному кирпичу (каждый новый кирпич добавляет 7, 9 или 15 к высоте текущей башни). Назовем число n *построимым,* если Вася может построить башню высоты ровно n. Сколько существует построимых чисел?

2/3. У Толи есть 30 одинаковых кирпичей размера $7\times11\times23$. Толя хочет построить из всех кирпичей одну башню, каждый раз добавляя сверху по одному кирпичу (каждый новый кирпич добавляет 7, 11 или 23 к высоте текущей башни). Назовем число n *построимым,* если Толя может построить башню высоты ровно n. Сколько существует построимых чисел?

3/1. В трапеции $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ $\angle A = 90^\circ$, $\angle D = 75$. Из вершины A опущен перпендикуляр AH на боковую сторону CD, причем основание H перпендикуляра лежит на отрезке CD. Оказалось, что $DH = BC$, $AH + AB = 8$. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

3/2. В трапеции $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ $\angle A = 90^\circ$, $\angle D = 75^\circ$. Из вершины A опущен перпендикуляр AH на боковую сторону CD, причем основание H перпендикуляра лежит на отрезке CD. Оказалось, что $DH = BC$, $AH + AB = 12$. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

3/3. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $\angle A = 90^\circ$, $\angle D = 75^\circ$. Из вершины A опущен перпендикуляр AH на боковую сторону CD, причем основание H перпендикуляра лежит на отрезке CD. Оказалось, что $DH = BC$, $AH + AB = 16$. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

4/1. Натуральное число назовем *волшебным,* если все его цифры ненулевые и при последовательном удалении старшего разряда из текущего числа на каждом шаге получается делитель этого числа. Например, число 312 — волшебное, так как 312 делится на 12 и 12 делится на 2. Известно, что существует ровно три волшебных пятизначных числа. Найдите из этих трех чисел среднее по величине.

4/2. Натуральное число назовем *волшебным,* если все его цифры ненулевые и при последовательном удалении старшего разряда из текущего числа на каждом шаге получается делитель этого числа. Например, число 312 — волшебное, так как 312 делится на 12 и 12 делится на 2. Известно, что существует ровно три волшебных пятизначных числа. Найдите из этих трех чисел наибольшее.

4/3. Натуральное число назовем *волшебным,* если все его цифры ненулевые и при последовательном удалении старшего разряда из текущего числа на каждом шаге получается делитель этого числа. Например, число 312 — волшебное, так как 312 делится на 12 и 12 делится на 2. Известно, что существует ровно три волшебных пятизначных числа. Найдите из этих трех чисел наименьшее.

5/1. Множество решений уравнения $x^2 + y^2 = 1$ делит координатную плоскость на две части (всё, что внутри заданной этим уравнением окружности, и всё, что вне). А на сколько частей делит координатную плоскость множество решений уравнения

5/2. Множество решений уравнения $x^2 + y^2 = 1$ делит координатную плоскость на две части (всё, что внутри заданной этим уравнением окружности, и всё, что вне). А на сколько частей делит координатную плоскость множество решений уравнения

$$\Big|\big||x| - 3\big| - 1\Big| + \Big|\big||y| - 3\big| - 1\Big| = 1\,?$$

5/3. Множество решений уравнения $x^2 + y^2 = 1$ делит координатную плоскость на две части (всё, что внутри заданной этим уравнением окружности, и всё, что вне). А на сколько частей делит координатную плоскость множество решений уравнения

$$\Big|\big||x|-3\big|-2\Big| + \Big|\big||y|-3\big|-2\Big| = 1\,?$$

6/1. На плоскости отмечены 2500 различных точек, каждая из которых красного или синего цвета. Для каждой синей точки нарисована окружность радиуса 1 с центром в этой точке. Оказалось, что на каждой нарисованной окружности лежат ровно две красные точки. Какое максимальное число отмеченных точек синего цвета могло быть?

6/2. На плоскости отмечены 3600 различных точек, каждая из которых красного или синего цвета. Для каждой синей точки нарисована окружность радиуса 1 с центром в этой точке. Оказалось, что на каждой нарисованной окружности лежат ровно две красные точки. Какое максимальное число отмеченных точек синего цвета могло быть?

6/3. На плоскости отмечены 4900 различных точек, каждая из которых красного или синего цвета. Для каждой синей точки нарисована окружность радиуса 1 с центром в этой точке. Оказалось, что на каждой нарисованной окружности лежат ровно две красные точки. Какое максимальное число отмеченных точек синего цвета могло быть?