1.2 8–9 классы

1. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Население острова составляет 1000 человек и сосредоточено в 10 селах (в каждом селе не менее двух человек). Однажды каждый островитянин заявил, что все его односельчане — лжецы. Сколько лжецов живет на острове? (Два жителя *односельчане,* если они живут в одном и том же селе.)

Ответ: 990.

В одном селе не могут жить хотя бы два рыцаря, так как иначе бы рыцари солгали. Также в селе не могут все быть лжецами, поскольку тогда бы эти лжецы сказали правду. Значит, в каждом селе ровно один рыцарь, и всего рыцарей 10, а лжецов — 990. □

2. Петя поднялся по движущемуся вверх эскалатору, насчитав 75 ступенек, а затем спустился по нему же (т. е. двигаясь против направления эскалатора), насчитав 150 ступенек. Во время спуска Петя шагал втрое быстрее, чем во время подъема. Сколько ступенек на остановленном эскалаторе?

Ответ: 120.

Для удобства введем условную единицу времени, за которую Петя совершал один шаг при подъеме на эскалаторе. Все скорости будем измерять в шагах в условную единицу времени. Скорость Пети при подъеме равна 1 шаг в единицу времени, скорость при спуске — 3. Обозначим скорость эскалатора за x. Абсолютная скорость Пети составляла $1+x$ при подъеме и $3-x$ на спуске. На подъем Петя потратил 75 единиц времени, на спуск — 50 (на спуске он совершал шаги втрое быстрее). При подъеме и при спуске была пройдено одно и то же расстояние — длина эскалатора. Значит, $75 \cdot (1 + x) = 50 \cdot (3 - x)$, откуда $125x = 75$, $x = 0{,}6$.

Длина эскалатора составляет $75 \cdot (1+0{,}6) = 120$ шагов. Именно столько ступенек будет на остановленном эскалаторе. □

3. Про выпуклый четырехугольник $ABCD$ известно, что $AB = BC = CA = CD$, $\angle ACD = 10°$. Вокруг треугольника BCD описана окружность ω с центром O. Прямая DA пересекает окружность ω в точках D и E. Найдите величину угла EOA, ответ выразите в градусах.

Ответ: 65.

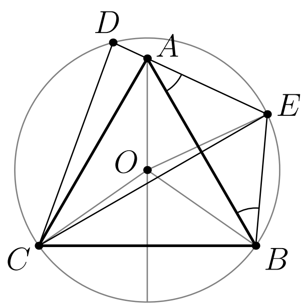


Рис. 2: к решению задачи 3.

Рис. 2. Так как треугольник ADC равнобедренный, и мы знаем угол при его вершине, углы при его основании равны $\angle DAC = \angle CDA = 85°$. Отсюда $\angle BAE = 180° - \angle DAC - \angle CAB = 35°$. Угол EBC дополняет угол EDC до $180°$ и потому равен $95°$, откуда $\angle EBA = 35°$. Следовательно, треугольник AEB равнобедренный, и прямая CE — серединнный перпендикуляр к AB. Но тогда CB — это биссектриса угла BCA, то есть $\angle BCE = 30°$, и соответствующий центральный угол $\angle BOE = 60°$.

С другой стороны, $\angle COE = 2\angle CDE = 170°$, откуда $\angle COB = 110°$.

Наконец, из симметрии треугольника ABC относительно AO легко видеть, что искомый угол EOA дополняет до $180°$ сумму угла BOE с половиной угла COB, т. е. $\angle EOA = 180° - \angle BOE - \frac{1}{2}\angle COB = 65°$. □

4. Аня пишет натуральное число, а Борис заменяет одну любую цифру на цифру, отличающуюся на 1. Какое наименьшее число Аня должна была написать, чтобы в результате гарантированно получилось число, кратное 11?

Ответ: 909090909.

Согласно признаку делимости на 11, остаток числа при делении на 11 совпадает с остатком знакопеременной суммы цифр этого числа при делении на 11. Соответственно, при изменении цифры на 1 остаток при делении на 11 тоже меняется на 1. Значит, исходное число дает остаток 10 или 1 при делении на 11.

Если исходное число дает остаток 10 при делении на 11, то всякое изменение его цифр должно увеличивать остаток знакопеременной суммы цифр при делении на 11 на 1. Значит, цифры на нечетных (считая с конца) позициях можно лишь увеличить на 1, а цифры на четных позициях — только уменьшить на 1, т. е. число имеет вид …909090. Наименьшее число такого вида, дающее остаток 10 при делении на 11 — это 9090909090.

Если исходное число дает остаток 1 при делении на 11, то, аналогично, оно имеет вид …90909, и наименьшее подходящее под условие число — 909090909. □

5. Дно ящика представляет собой таблицу 8×8. Какое наименьшее ненулевое число плиток 2×1 или 1×2 можно расположить на дне ящика так, чтобы ни одну плитку нельзя было подвинуть ни по горизонтали, ни по вертикали? Каждая плитка должна занимать ровно две клетки, не занятые другими плитками.

Ответ: 28.

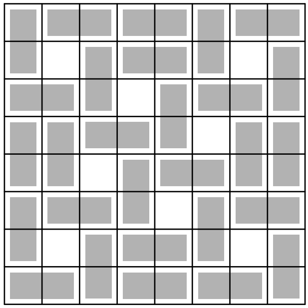
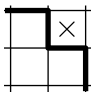


Рис. 3: к решению задачи 5.

Пример: схему расположения 28 плиток можно увидеть на рис. 3.

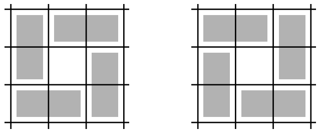
Оценка. Клетки, не покрытые плитками, назовем *пустыми.* Для начала докажем, что никакие две пустые клетки не могут быть соседними по стороне.

Предположим противное: какие-то две пустые клетки оказались соседними. Рассмотрим фигуру, образованную соседними по стороне пустыми клетками. Заметим, что фигура не может содержать вогнутых углов (рис.), так как плитку, закрывающая отмеченную крестиком клетку, можно подвинуть по вертикали, если она вертикальная, или по горизонтали, если она горизонтальная.



Если у фигуры нет вогнутых углов, то она — прямоугольник. Обозначим его размеры $a \times b$, где $a \geqslant b$. Ситуация $a \geqslant 3$ невозможна, так как хотя бы к одной из сторон прямоугольника длины a должны примыкать плитки (а не край ящика), но тогда плитку, примыкающую к некрайней клетке рассматриваемой стороны, можно задвинуть в прямоугольник. С помощью короткого перебора можно доказать, что прямоугольники 2×2 и 2×1 из пустых клеток также невозможны.

Итак, все пустые клетки изолированы. Никакая пустая клетка не может стоять у края доски, иначе одну из примыкающих к этой пустой клетке плиток можно задвинуть на эту пустую клетку. Плитки, примыкающие к пустой клетке, можно уложить всего двумя способами, показанными на рисунке.



Из этого, в частности, следует, что две пустые клетки не могут находиться в одной строке или одном столбце на расстоянии два, а также не могут являться соседними по диагонали.

Теперь мы готовы завершить оценку. Предположим, что можно обойтись менее, чем 28 плитками. Тогда останется более 8 пустых клеток. Так как пустые клетки не могут примыкать к границе ящика, они окажутся сосредоточены в центральном квадрате 6×6. Разобьем квадрат 6×6 на четыре квадрата 3×3. Один из квадратов должен содержать не менее трех пустых клеток. Но короткий перебор их потенциальных расположений показывает, что это невозможно. Противоречие. $\square$

6. На плацу в одну шеренгу выстроены 2018 солдат. Командир может приказать либо всем, стоящим на четных местах, либо всем, стоящим на нечетных местах, покинуть строй. После этого приказа оставшиеся в строю солдаты смыкаются в одну шеренгу. Сколькими способами командир может отдать серию из 8 приказов так, чтобы в строю осталось ровно 7 человек?

Ответ: 30.

Добавим в конец строя 30 воображаемых людей. Пронумеруем всех людей в строю числами от 0 до 2047. Запишем все эти номера в двоичном виде с помощью 11 цифр. Получатся последовательности от 00000000000 до 11111111111. Воображаемым солдатам соответствуют номера от 11111100010 до 11111111111 (от 2018 до 2047 в двоичной записи).

Заметим, что солдаты на четных местах имеют 1 в качестве последней цифры двоичной записи, а солдаты на нечетных местах — 0. Значит, в результате выполнения приказа в строю остаются солдаты с фиксированной последней цифрой. После выполнения следующего приказа в строю останутся солдаты с фиксированной предпоследней цифрой, и так далее.

После серии из 8 приказов в строю останутся солдаты, двоичные номера которых имею вид $\overline{xxxabcdefgh}$, где символами x обозначены цифры, принимающие произвольные значения; a, b, c, d, e, f, g, h — зафиксированные в первых восьми приказах цифры. Ясно, что солдаты, у которых $\overline{xxx} = 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110$, действительно присутствовали в изначальном строю, так как минимальный номер воображаемого солдата начинается на 111. Нас интересуют ситуации, когда солдат с номером $\overline{111abcdefgh}$ — воображаемый (в противном случае остается 8 человек). Это происходит ровно в 30 случаях: от 11111100010 до 11111111111. Итого возможно 30 нарядов из 7 человек. $\square$