Олимпиада «Курчатов», 2018 г., финальный тур
Решения задач

6 класс

1. Незнайка, Кнопочка, Винтик и Знайка участвовали в математическом конкурсе. Каждую задачу конкурса решили ровно трое из них. Знайка решил строго больше каждого из остальных — 10 задач, а Незнайка решил строго меньше каждого остальных — 7 задач. Сколько всего задач было в математическом конкурсе?

Ответ: 11.

Заметим, что Винтик и Кнопочка решили либо 8, либо 9 задач; таким образом, общее количество решенных задач может быть от $7 + 8 + 8 + 10 = 33$ до $7 + 9 + 9 + 10 = 35$. Но это число равно утроенному количеству задач, предложенных на конкурсе. Среди чисел $33, 34, 35$ только число 33 кратно трем. Значит, общее количество решенных задач равно 33, а задач всего было 11. □

Критерии

+ Верное решение — 7 баллов.

∓ Верный ответ без обоснования — 2 балла.

2. Разрежьте по линиям сетки клетчатый квадрат 7×7 на 5 частей таким образом, чтобы из них можно было сложить три квадрата разной площади.

Одно из возможных решений изображено на рис. 1. □

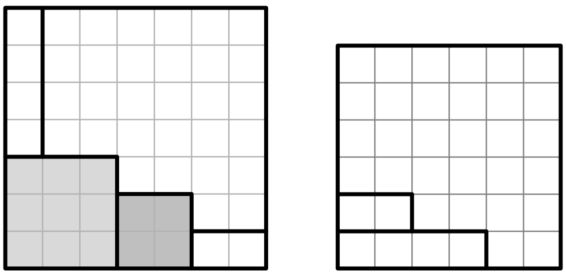

Рис. 1: к решению задачи 2.

Критерии

+ Любое верное разрезание — 7 баллов.

3. Сколькими способами можно вставить несколько знаков «+» между цифрами в числе 111 111 111 111 (12 единиц) так, чтобы результат делился на 30?

Ответ: 55.

Делимость числа на 30 равносильна одновременной делимости числа на 3 и на 10. Заметим, что в силу признака делимости на 3 каждое слагаемое будет давать такой же остаток при делении на 3, какой дает количество единиц в записи этого слагаемого. Общее число единиц равно 12, а значит, результат будет кратен 3 вне зависимости от того, как именно расставлены знаки «+». Осталось разобраться, при каких условиях на расстановку плюсов результат кратен 10.

Каждое слагаемое оканчивается на 1, слагаемых в сумме не более 12. Получается, что результат делится на 10 тогда и только тогда, когда слагаемых ровно 10, а плюсов между ними — 9. Получить любую расстановку девяти знаков «+» можно следующим образом: сначала поставить 11 плюсов, получив сумму $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$, а затем стереть два произвольных знака «+». Выбрать два произвольных плюса из 11 можно ровно $\frac{11 \cdot 10}{2} = 55$ способами, что и является ответом к задаче. □

Критерии

+ Верное решение — 7 баллов.

+ В логически верном решении при вычислении количества способов расстановки 9 плюсов произошла арифметическая ошибка — 5 баллов.

$\pm$ Доказано, что результат будет кратен 30, если и только если плюсов 9, но количество способов это сделать не вычислено — 4 балла.

$\mp$ Верный ответ без пояснений (или с неверными пояснениями) — 2 балла.

Баллы за следующие два продвижения ставятся при отсутствии баллов за приведенные выше ситуации и суммируются между собой.

$-.$ Доказано, что результат всегда кратен 3 вне зависимости от числа плюсов — 1 балл.

$-.$ Указано, что делимость на 30 равносильна одновременной делимости на 10 и на 3 (или даже на 2, на 5 и на 3) — 1 балл.

4. Вася помнит, что его друг Петя живет на Курчатовской улице в доме номер 8, а номер квартиры забыл. На просьбу уточнить адрес Петя ответил: «Номер моей квартиры — трехзначное число. Если переставить в нем цифры, то получится пять других трехзначных чисел. Так вот, сумма этих пяти чисел будет в точности 2017». Помогите Васе вспомнить номер квартиры Пети.

Ответ: 425.

Обозначим первую, вторую и третью цифры номера квартиры Пети через a, b, c соответственно. Условие задачи алгебраически записывается следующим образом:

$$\overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 2017\,.$$

Прибавим к обеим частям $\overline{abc}$ и в левой части распишем все трехзначные числа с помощью формулы $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, после приведения подобных получим

$$222 \cdot (a+b+c) = \overline{abc} + 2017\,.$$

Следовательно,

$$3016 = 2017 + 999 \geqslant 222(a+b+c) \geqslant 2017 + 100 = 2117\,,$$

из чего заключаем, что $a+b+c$ может принимать лишь значения 10, 11, 12 или 13. Разберем все 4 случая:

(1) $a+b+c = 10$, тогда

$$\overline{abc} = 2220 - 2017 = 203$$

не подходит, так как сумма цифр числа 203 равна 5, а не 10;

(2) $a+b+c = 11$, тогда

$$\overline{abc} = 2442 - 2017 = 425$$

— подходит;

(3) $a+b+c = 12$, тогда

$$\overline{abc} = 2664 - 2017 = 647$$

не подходит, так как сумма цифр числа 647 равна 17, а не 12;

(4) $a+b+c = 13$, тогда

$$\overline{abc} = 2886 - 2017 = 869$$

не подходит, так как сумма цифр числа 869 равна 23, а не 13. □

Критерии

- $+$ Полное верное решение — 7 баллов.
- $\pm$ Задача сведена к короткому перебору, но из-за арифметических ошибок решение потерялось — 5 баллов.
- $\mp$ Условие переписано в виде $222 \cdot (a+b+c) = \overline{abc} + 2017$ или эквивалентном, дальнейших продвижений нет — 3 балла.
- $\mp$ Только верный ответ без объяснения — 2 балла.

5. В каждом поле таблицы 15×15 записано число -1, 0 или $+1$ так, что сумма чисел в любой строке неположительна, а сумма чисел в любом столбце неотрицательна. Какое наименьшее количество нулей может быть записано в клетках таблицы?

Ответ: 15.

Оценка. Раз сумма чисел во всех строках неположительна, то и сумма всех чисел в таблице неположительна. С другой стороны, если сумма чисел в любом столбце неотрицательна, то и сумма всех чисел в таблице неотрицательна. Следовательно, на самом деле сумма всех чисел в таблице нулевая, и суммы чисел в каждом столбце и в каждой строке также нулевые.

В каждой строке должен стоять хотя бы один нуль, так как в противном случае сумма всех пятнадцати $+1$ и -1 окажется нечетной, а должна быть нулевой.

Таким образом, нулей в таблице стоит не менее 15.

+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	
−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−		+
+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−		+	−
−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−		+	−	+
+	−	+	−	+	−	+	−	+	−		+	−	+	−
−	+	−	+	−	+	−	+	−		+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−	+	−		+	−	+	−	+	−
−	+	−	+	−	+	−		+	−	+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−		+	−	+	−	+	−	+	−
−	+	−	+	−		+	−	+	−	+	−	+	−	+
+	−	+	−		+	−	+	−	+	−	+	−	+	−
−	+	−		+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+
+	−		+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−
−		+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+
	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−

Рис. 2: к решению задачи 5.

Пример. Один из возможных примеров с 15 нулями приведен на рис. 2. Символы «+» и «−» соответствуют расположению чисел $+1$ и -1, закрашенные клетки — расположению нулей. □

Критерии

- $+$ Верное решение — 7 баллов.
- $-.$ Дан верный ответ без пояснений (или с неверными пояснениями) — 1 балл.

  Решение естественным образом разбивается на две части: пример расстановки чисел с 15 нулями и доказательство того, что нулей хотя бы 15. Баллы за эти части суммируются.

- $\mp$ Приведен верный пример с 15 нулями — 3 балла.
- $\pm$ Обосновано, что нулей не может быть меньше 15 (или что в каждой строке/столбце есть хотя бы по нулю) — 4 баллов.
- $-.$ Замечено, что сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце должна быть нулевой, но вывода о наличии нуля в произвольной строке/столбце не последовало — 1 балл из 4 возможных за оценку.