Олимпиада «Курчатов», интернет-тур
Решения задач

1 Интернет-тур

1.1 6–7 классы

1. За круглым столом сидят рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут; всего 12 человек. Каждый из сидящих заявил: «напротив меня сидит лжец». Сколько лжецов было за столом?

Ответ: 6.

Разобьем людей на 6 пар сидящих друг напротив друга. Заметим, что в паре не может быть двух рыцарей (иначе бы они оба солгали) и не может быть двух лжецов (иначе бы они оба сказали правду). Значит, в каждой паре ровно один лжец, и всего лжецов 6. $\square$

2. При умножении пятизначного числа на 9 получилось число, составленное из тех же цифр, но в обратном порядке. Найдите исходное число.

Ответ: 10989.

Пусть $\overline{abcde}$ — исходное число. Условие записывается в виде уравнения $9 \cdot \overline{abcde} = \overline{edcba}$. Заметим, что $a = 1$, так как если $a \geqslant 2$, то $9 \cdot \overline{abcde} \geqslant 9 \cdot 20000 > 100000 > \overline{edcba}$.

Имеем $9 \cdot \overline{1bcde} = \overline{edcb1}$. Отсюда однозначно восстанавливается последняя цифра $e = 9$.

Работаем с $9 \cdot \overline{1bcd9} = \overline{9dcb1}$. Заметим, что если $b \geqslant 2$, то $9 \cdot \overline{1bcd9} > 9 \cdot 12000 > 100000 > \overline{edcba}$. Значит, $b = 0$ или $b = 1$. Рассмотрим эти два случая:

Если $b = 0$, то уравнение приводится к виду $9 \cdot \overline{10cd9} = \overline{9dc01}$. Рассмотрев вторую с конца цифру, приходим к выводу, что $d = 8$. Перебрав возможные варианты цифры c, находим единственное решение $\overline{abcde} = 10989$.

Если же $b = 1$, то уравнение переписывается в $9 \cdot \overline{11cd9} = \overline{9dc11}$. Анализируя вторую с конца цифру, получаем $d = 7$. Но $9 \cdot \overline{11c79} > 9 \cdot 11000 = 99000 > \overline{97c11}$, противоречие. Значит, в случае $b = 1$ решений нет.

Единственное число, удовлетворяющее условию задачи — 10989. □

3. Пару чисел назовем *магической*, если числа в паре в сумме делятся на 7. Какое максимальное количество магических пар рядом стоящих чисел может получиться при выписывании всех чисел от 1 до 30 в ряд в некотором порядке?

Ответ: 26.

Пример: 1, 6, 8, 13, 15, 20, 22, 27, 29, 2, 5, 9, 12, 16, 19, 23, 26, 30, 3, 4, 10, 11, 17, 18, 24, 25, 7, 14, 21, 28. Несложно видеть, что в этом ряду лишь пары $(29, 2), (30, 3), (25, 7)$ не являются магическими.

Оценка: предположим, что можно сделать не менее 27 пар магическими. Тогда будет не более двух немагических пар. Раскрасим все числа от 1 до 30 в четыре цвета следующим образом в зависимости от того, какой остаток при делении на 7 они дают: числа с остатками 1 или 6 — в красный цвет; с остатками 2 или 5 — в синий; с остатками 3 или 4 — в фиолетовый; с остатком 0 — в оранжевый.

Заметим, что числа в магической паре обязательно одного цвета. Следовательно, если было не более двух немагических пар, то при движении вдоль строки слева направо цвет сменился бы не более двух раз, т. е. цветов было не более трех. Но их четыре, противоречие. □

4. В велогонках по круговому треку принимали участие три юных спортсмена. Первым к финишу пришел Петя, причем он обогнал Васю ровно на один круг и обогнал Толю ровно на два круга. Выяснилось, что каждый круг Петя проезжал на три секунды быстрее Васи и на семь секунд быстрее Толи. Сколько кругов составляла дистанция?

Ответ: 8.

Обозначим число кругов, пройденных Петей, за n, и время, за которое он проходил один круг, за t. Посчитав суммарное время гонки тремя способами, приходим к уравнениям

$$n \cdot t = (n-1) \cdot (t+3) = (n-2) \cdot (t+7)\,.$$

Если раскрыть скобки и вычесть $n \cdot t$ из всех выражений, останется $0 = 3n - t - 3 = 7n - 2t - 14$. Вычтем из выражения $7n - 2t - 14$ удвоенное $3n - t - 3$, останется $n - 8 = 0$, $n = 8$. □

5. У Димы есть 25 одинаковых кирпичей размера $5 \times 14 \times 17$. Дима хочет построить из всех своих кирпичей одну башню, каждый раз добавляя сверху по одному кирпичу (каждый новый кирпич добавляет 5, 14 или 17 к высоте текущей башни). Назовем число n *построимым,* если Дима может построить башню высоты ровно n. Сколько существует построимых чисел?

Ответ: 98.

По сути, треубется найти количество разных по высоте башен, которые возможно построить из данного набора кирпичей.

Мысленно уменьшим длину, ширину и высоту каждого кирпича на 5: с $5 \times 14 \times 17$ до $0 \times 9 \times 12$. Тогда суммарная высота потенциальной башни уменьшится на $25 \cdot 5$, и число разных по высоте башен, составленных из новых кирпичей, будет совпадать с числом разных по высоте башен из старых. Уменьшим теперь размеры кирпичей в три раза: с $0 \times 9 \times 12$ до $0 \times 3 \times 4$. Размеры потенциальных башен уменьшатся также в три раза, и число разных по высоте башен вновь не изменится.

Таким образом, исходная задача равносильна следующей: сколько различных значений можно получить, складывая числа 0, 3, 4 в количестве 25? Заметим, что если в сумме хотя бы четыре раза встречается число 3, то набор 3, 3, 3, 3 можно заменить на набор 4, 4, 4, 0; при этой замене и сумма, и количество чисел сохранятся. Значит, можно рассматривать лишь те суммы, где число 3 встречается не более трех раз.

Если число 3 встречается 0 раз, то возможны 26 различных значений суммы: $0, 4, 8, \ldots, 4 \cdot 25$.

Если число 3 встречается 1 раз, то возможны 25 различных значений суммы: $3, 3+4, 3+8, \ldots, 3+4 \cdot 24$.

Если число 3 встречается 2 раза, то возможны 24 различные значения суммы: $6, 6+4, 6+8, \ldots, 6+4 \cdot 23$.

Если число 3 встречается 3 раза, то возможны 23 различные значения суммы: $9, 9+4, 9+8, \ldots, 9+4\cdot 22$.

Значения в первом, втором, третьем и четвертом списке дают остатки при делении на 4 соответственно 0, 3, 2, 1, и потому значения в разных списках разные.

Итого $26 + 25 + 24 + 23 = 98$ возможных значений высоты башни. $\square$

6. Дно ящика представляет собой таблицу 8×8. Какое наименьшее ненулевое число плиток 2×1 или 1×2 можно расположить на дне ящика так, чтобы ни одну плитку нельзя было подвинуть ни по горизонтали, ни по вертикали? Каждая плитка должна занимать ровно две клетки, не занятые другими плитками.

Ответ: 28.

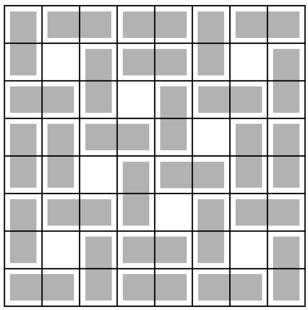
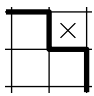


Рис. 1: к решению задачи 6.

Пример: схему расположения 28 плиток можно увидеть на рис. 1.

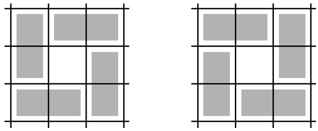
Оценка. Клетки, не покрытые плитками, назовем *пустыми.* Для начала докажем, что никакие две пустые клетки не могут быть соседними по стороне.

Предположим противное: какие-то две пустые клетки оказались соседними. Рассмотрим фигуру, образованную соседними по стороне пустыми клетками. Заметим, что фигура не может содержать вогнутых углов (рис.), так как плитку, закрывающая отмеченную крестиком клетку, можно подвинуть по вертикали, если она вертикальная, или по горизонтали, если она горизонтальная.



Если у фигуры нет вогнутых углов, то она — прямоугольник. Обозначим его размеры $a \times b$, где $a \geqslant b$. Ситуация $a \geqslant 3$ невозможна, так как хотя бы к одной из сторон прямоугольника длины a должны примыкать плитки (а не край ящика), но тогда плитку, примыкающую к некрайней клетке рассматриваемой стороны, можно задвинуть в прямоугольник. С помощью короткого перебора можно доказать, что прямоугольники 2×2 и 2×1 из пустых клеток также невозможны.

Итак, все пустые клетки изолированы. Никакая пустая клетка не может стоять у края доски, иначе одну из примыкающих к этой пустой клетке плиток можно задвинуть на эту пустую клетку. Плитки, примыкающие к пустой клетке, можно уложить всего двумя способами, показанными на рисунке.



Из этого, в частности, следует, что две пустые клетки не могут находиться в одной строке или одном столбце на расстоянии два, а также не могут являться соседними по диагонали.

Теперь мы готовы завершить оценку. Предположим, что можно обойтись менее, чем 28 плитками. Тогда останется более 8 пустых клеток. Так как пустые клетки не могут примыкать к границе ящика, они окажутся сосредоточены в центральном квадрате 6×6. Разобьем квадрат 6×6 на четыре квадрата 3×3. Один из квадратов должен содержать не менее трех пустых клеток. Но короткий перебор их потенциальных расположений показывает, что это невозможно. Противоречие. $\square$