1.3 10–11 классы

1/1. При каком значении k числа $28+k$, $300+k$ и $604+k$ в указанном порядке служат квадратами трех последовательных членов некоторой возрастающей арифметической прогрессии?

Ответ: 996.

Обозначим члены арифметической прогрессии за $a-d$, a, $a+d$. Заметим, что

$$2d^2 = (a-d)^2 + (a+d)^2 - 2a^2 = \\ = (28+k) + (604+k) - 2\cdot(300+k) = 32\,,$$

откуда $d = 4$ ($d > 0$, так как прогрессия возрастает).

Далее: $8a - 16 = a^2 - (a-4)^2 = (300+k) - (28+k) = 272$, что дает $a = 36$. Наконец, раз $a^2 = 300+k$, то $k = 36^2 - 300 = 996$. □

1/2. При каком значении k числа $36+k$, $300+k$ и $596+k$ в указанном порядке служат квадратами трех последовательных членов некоторой возрастающей арифметической прогрессии?

Ответ: 925.

Обозначим члены арифметической прогрессии за $a-d$, a, $a+d$. Заметим, что

$$2d^2 = (a-d)^2 + (a+d)^2 - 2a^2 = \\ = (36+k) + (596+k) - 2\cdot(300+k) = 32\,,$$

откуда $d = 4$ ($d > 0$, так как прогрессия возрастает).

Далее: $8a - 16 = a^2 - (a-4)^2 = (300+k) - (36+k) = 264$, что дает $a = 35$. Наконец, раз $a^2 = 300+k$, то $k = 35^2 - 300 = 925$. □

1/3. При каком значении k числа $44+k$, $300+k$ и $588+k$ в указанном порядке служат квадратами трех последовательных членов некоторой возрастающей арифметической прогрессии?

Ответ: 856.

Обозначим члены арифметической прогрессии за $a-d$, a, $a+d$. Заметим, что

$$2d^2 = (a-d)^2 + (a+d)^2 - 2a^2 = \\ = (44+k) + (588+k) - 2\cdot(300+k) = 32\,,$$

откуда $d = 4$ ($d > 0$, так как прогрессия возрастает).

Далее: $8a - 16 = a^2 - (a-4)^2 = (300+k) - (44+k) = 256$, что дает $a = 34$. Наконец, раз $a^2 = 300 + k$, то $k = 34^2 - 300 = 856$. $\square$

2/1. У Пети есть 35 одинаковых кирпичей размера $5\times8\times17$. Петя хочет построить из всех кирпичей одну башню, каждый раз добавляя сверху по одному кирпичу (каждый новый кирпич добавляет 5, 8 или 17 к высоте текущей башни). Назовем число n *построимым,* если Петя может построить башню высоты ровно n. Сколько существует построимых чисел?

Ответ: 138.

По сути, треубется найти количество разных по высоте башен, которые возможно построить из данного набора кирпичей.

Мысленно уменьшим длину, ширину и высоту каждого кирпича на 5: с $5\times8\times17$ до $0\times3\times12$. Тогда суммарная высота потенциальной башни уменьшится на $35\cdot5$, и число разных по высоте башен, составленных из новых кирпичей, будет совпадать с числом разных по высоте башен из старых. Уменьшим теперь размеры кирпичей в три раза: с $0\times3\times12$ до $0\times1\times4$. Размеры потенциальных башен уменьшатся также в три раза, и число разных по высоте башен вновь не изменится.

Таким образом, исходная задача равносильна следующей: сколько различных значений можно получить, складывая числа 0, 1, 4 в количестве 35? Заметим, что если в сумме хотя бы четыре раза встречается число 1, то набор 1, 1, 1, 1 можно заменить на набор 4, 0, 0, 0; при этой замене и сумма, и количество чисел сохранятся. Значит, можно рассматривать лишь те суммы, где число 1 встречается не более трех раз.

Если число 1 встречается 0 раз, то возможны 36 различных значений суммы: $0, 4, 8, \ldots, 4\cdot35$.

Если число 1 встречается 1 раз, то возможны 35 различных значений суммы: $1, 1+4, 1+8, \ldots, 1+4\cdot34$.

Если число 1 встречается 2 раза, то возможны 34 различные значения суммы: $2, 2+4, 2+8, \ldots, 2+4\cdot33$.

Если число 1 встречается 3 раза, то возможны 33 различные значения суммы: $3, 3+4, 3+8, \ldots, 3+4\cdot 32$.

Числа из разных списков разные, так как дают разные остатки при делении на 4.

Итого $36+35+34+33 = 138$ возможных значений высоты башни. □

2/2. У Васи есть 40 одинаковых кирпичей размера $7\times 9\times 15$. Вася хочет построить из всех кирпичей одну башню, каждый раз добавляя сверху по одному кирпичу (каждый новый кирпич добавляет 7, 9 или 15 к высоте текущей башни). Назовем число n *построимым,* если Вася может построить башню высоты ровно n. Сколько существует построимых чисел?

Ответ: 158.

По сути, треубется найти количество разных по высоте башен, которые возможно построить из данного набора кирпичей.

Мысленно уменьшим длину, ширину и высоту каждого кирпича на 7: с $7\times 9\times 15$ до $0\times 2\times 8$. Тогда суммарная высота потенциальной башни уменьшится на $40\cdot 7$, и число разных по высоте башен, составленных из новых кирпичей, будет совпадать с числом разных по высоте башен из старых. Уменьшим теперь размеры кирпичей в два раза: с $0\times 2\times 8$ до $0\times 1\times 4$. Размеры потенциальных башен уменьшатся также в два раза, и число разных по высоте башен вновь не изменится.

Таким образом, исходная задача равносильна следующей: сколько различных значений можно получить, складывая числа 0, 1, 4 в количестве 40? Заметим, что если в сумме хотя бы четыре раза встречается число 1, то набор 1, 1, 1, 1 можно заменить на набор 4, 0, 0, 0; при этой замене и сумма, и количество чисел сохранятся. Значит, можно рассматривать лишь те суммы, где число 1 встречается не более трех раз.

Если число 1 встречается 0 раз, то возможно 41 различное значение суммы: $0, 4, 8, \ldots, 4\cdot 40$.

Если число 1 встречается 1 раз, то возможны 40 различных значений суммы: $1, 1+4, 1+8, \ldots, 1+4\cdot 39$.

Если число 1 встречается 2 раза, то возможны 39 различных значений суммы: $2, 2+4, 2+8, \ldots, 2+4\cdot 38$.

Если число 1 встречается 3 раза, то возможны 38 различных значений суммы: $3, 3+4, 3+8, \ldots, 3+4\cdot 37$.

Числа из разных списков разные, так как дают разные остатки при делении на 4.

Итого $41+40+39+38 = 158$ возможных значений высоты башни. □

2/3. У Толи есть 30 одинаковых кирпичей размера $7 \times 11 \times 23$. Толя хочет построить из всех кирпичей одну башню, каждый раз добавляя сверху по одному кирпичу (каждый новый кирпич добавляет 7, 11 или 23 к высоте текущей башни). Назовем число n *построимым,* если Толя может построить башню высоты ровно n. Сколько существует построимых чисел?

Ответ: 118.

По сути, треубется найти количество разных по высоте башен, которые возможно построить из данного набора кирпичей.

Мысленно уменьшим длину, ширину и высоту каждого кирпича на 7: с $7\times11\times23$ до $0\times4\times16$. Тогда суммарная высота потенциальной башни уменьшится на $30 \cdot 7$, и число разных по высоте башен, составленных из новых кирпичей, будет совпадать с числом разных по высоте башен из старых. Уменьшим теперь размеры кирпичей в четыре раза: с $0 \times 4 \times 16$ до $0 \times 1 \times 4$. Размеры потенциальных башен уменьшатся также в четыре раза, и число разных по высоте башен вновь не изменится.

Таким образом, исходная задача равносильна следующей: сколько различных значений можно получить, складывая числа 0, 1, 4 в количестве 30? Заметим, что если в сумме хотя бы четыре раза встречается число 1, то набор 1, 1, 1, 1 можно заменить на набор 4, 0, 0, 0; при этой замене и сумма, и количество чисел сохранятся. Значит, можно рассматривать лишь те суммы, где число 1 встречается не более трех раз.

Если число 1 встречается 0 раз, то возможно 31 различное значение суммы: $0, 4, 8, \ldots, 4 \cdot 30$.

Если число 1 встречается 1 раз, то возможны 30 различных значений суммы: $1, 1 + 4, 1 + 8, \ldots, 1 + 4 \cdot 29$.

Если число 1 встречается 2 раза, то возможны 29 различных значений суммы: $2, 2 + 4, 2 + 8, \ldots, 2 + 4 \cdot 28$.

Если число 1 встречается 3 раза, то возможны 28 различных значений суммы: $3, 3 + 4, 3 + 8, \ldots, 3 + 4 \cdot 27$.

Числа из разных списков разные, так как дают разные остатки при делении на 4.

Итого $31+30+29+28 = 118$ возможных значений высоты башни. $\square$

3/1. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $\angle A = 90°$, $\angle D = 75°$. Из вершины A опущен перпендикуляр AH на боковую сторону CD, причем основание H перпендикуляра лежит на отрезке CD. Оказалось, что $DH = BC$, $AH + AB = 8$. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

Ответ: 8.

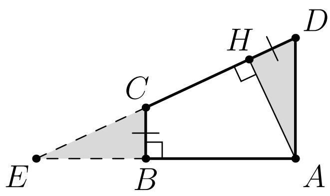


Рис. 4: к решению задачи 3/1.

Рис. 4. Обозначим точку пересечения прямых AB и CD за E. Прямоугольные треугольники EBC и AHD равны по катету и острому углу, а значит и их площади равны. Но тогда площадь трапеции $ABCD$ равна площади треугольника EAH. Угол EAH, как несложно посчитать, равен $75°$, длина гипотенузы AE равна $AB+BE = AH+AB = 8$. Длины катетов AH и HE вычисляются как $AE \cdot \cos 75°$ и $AE \cdot \sin 75°$. Теперь мы готовы вычислить площадь.

$$S_{ABCD} = S_{EAB} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot HE = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot \cos(75°) \cdot AE \cdot \sin(75°) =$$
$$= AE^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \cos(75°) \cdot \sin(75°) =$$
$$= \frac{1}{4} \cdot AE^2 \cdot \sin(150°) = \frac{1}{8} \cdot AE^2 = 8\,. \quad \square$$

3/2. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $\angle A = 90°$, $\angle D = 75°$. Из вершины A опущен перпендикуляр AH на боковую сторону CD, причем основание H перпендикуляра лежит на отрезке CD. Оказалось, что $DH = BC$, $AH + AB = 12$. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

Ответ: 18.

Рис. 5. Обозначим точку пересечения прямых AB и CD за E. Прямоугольные треугольники EBC и AHD равны по катету и острому углу, а значит и их площади равны. Но тогда площадь трапеции $ABCD$ равна площади треугольника EAH. Угол EAH, как несложно посчитать, равен $75°$, длина гипотенузы AE равна $AB+BE = AH+AB = 8$.

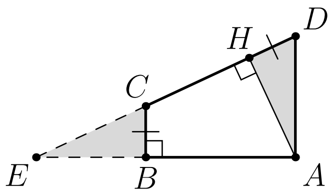


Рис. 5: к решению задачи 3/2.

Длины катетов AH и HE вычисляются как $AE \cdot \cos 75°$ и $AE \cdot \sin 75°$. Теперь мы готовы вычислить площадь.

$$S_{ABCD} = S_{EAB} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot HE = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot \cos(75°) \cdot AE \cdot \sin(75°) =$$
$$= AE^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \cos(75°) \cdot \sin(75°) =$$
$$= \frac{1}{4} \cdot AE^2 \cdot \sin(150°) = \frac{1}{8} \cdot AE^2 = 18\,. \quad \square$$

3/3. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $\angle A = 90°$, $\angle D = 75°$. Из вершины A опущен перпендикуляр AH на боковую сторону CD, причем основание H перпендикуляра лежит на отрезке CD. Оказалось, что $DH = BC$, $AH + AB = 16$. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

Ответ: 32.

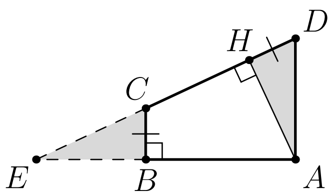


Рис. 6: к решению задачи 3/3.

Рис. 4. Обозначим точку пересечения прямых AB и CD за E. Прямоугольные треугольники EBC и AHD равны по катету и острому углу, а значит и их площади равны. Но тогда площадь трапеции $ABCD$ равна площади треугольника EAH. Угол EAH, как несложно посчитать, равен $75°$, длина гипотенузы AE равна $AB+BE = AH+AB = 8$. Длины катетов AH и HE вычисляются как $AE \cdot \cos 75°$ и $AE \cdot \sin 75°$.

Теперь мы готовы вычислить площадь.

$$S_{ABCD} = S_{EAB} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot HE = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot \cos(75^\circ) \cdot AE \cdot \sin(75^\circ) =$$
$$= AE^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \cos(75^\circ) \cdot \sin(75^\circ) =$$
$$= \frac{1}{4} \cdot AE^2 \cdot \sin(150^\circ) = \frac{1}{8} \cdot AE^2 = 32\,. \quad \square$$

4/1. Натуральное число назовем *волшебным,* если все его цифры ненулевые и при последовательном удалении старшего разряда из текущего числа на каждом шаге получается делитель этого числа. Например, число 312 — волшебное, так как 312 делится на 12 и 12 делится на 2. Известно, что существует ровно три волшебных пятизначных числа. Найдите из этих трех чисел среднее по величине.

Ответ: 91125.

Найдем все пятизначные волшебные числа. Пусть $\overline{abcde}$ — волшебное пятизначное число; в частности, $\overline{abcde}$ делится на $\overline{bcde}$. Но тогда и $10^4a = \overline{abcde} - \overline{bcde}$ делится на $\overline{bcde}$.

Докажем, что $e = 5$. Предположим противное: $e \neq 5$. Так как $e \neq 0$ по условию, то $\overline{bcde}$ не делится на 5. Но тогда 2^4a должно делится на $\overline{bcde}$. Это невозможно, так как $2^4a < 16 \cdot 10 = 160 < 1000 \leqslant \overline{bcde}$. Противоречие.

Раз $e = 5$, то $\overline{bcde}$ — нечетное число, и 5^4a кратно $\overline{bcde}$. Переберем всевозможные нечетные четырехзначные делители чисел вида $625a$, где a — цифра.

Если $a = 1, 2, 4, 8$, то таких делителей у $625a$ нет.

Если $a = 3, 6$, то подходит только 1875.

Если $a = 5$, то подходит только 3125.

Если $a = 7$, то подходит только 4375.

Если $a = 9$, то подходят 1125, 1875, 5625.

Волшебными числами являются лишь 53125, 91125, 95625. $\square$

4/2. Натуральное число назовем *волшебным,* если все его цифры ненулевые и при последовательном удалении старшего разряда из текущего числа на каждом шаге получается делитель этого числа. Например, число 312 — волшебное, так как 312 делится на 12 и 12 делится на 2. Известно, что существует ровно три волшебных пятизначных числа. Найдите из этих трех чисел наибольшее.

Ответ: 95625.

Найдем все пятизначные волшебные числа. Пусть $\overline{abcde}$ — волшебное пятизначное число; в частности, $\overline{abcde}$ делится на $\overline{bcde}$. Но тогда и $10^4a = \overline{abcde} - \overline{bcde}$ делится на $\overline{bcde}$.

Докажем, что $e = 5$. Предположим противное: $e \neq 5$. Так как $e \neq 0$ по условию, то $\overline{bcde}$ не делится на 5. Но тогда 2^4a должно делится на $\overline{bcde}$. Это невозможно, так как $2^4a < 16 \cdot 10 = 160 < 1000 \leqslant \overline{bcde}$. Противоречие.

Раз $e = 5$, то $\overline{bcde}$ — нечетное число, и 5^4a кратно $\overline{bcde}$. Переберем всевозможные нечетные четырехзначные делители чисел вида $625a$, где a — цифра.

Если $a = 1, 2, 4, 8$, то таких делителей у $625a$ нет.

Если $a = 3, 6$, то подходит только 1875.

Если $a = 5$, то подходит только 3125.

Если $a = 7$, то подходит только 4375.

Если $a = 9$, то подходят 1125, 1875, 5625.

Волшебными числами являются лишь 53125, 91125, 95625. $\square$

4/3. Натуральное число назовем *волшебным,* если все его цифры ненулевые и при последовательном удалении старшего разряда из текущего числа на каждом шаге получается делитель этого числа. Например, число 312 — волшебное, так как 312 делится на 12 и 12 делится на 2. Известно, что существует ровно три волшебных пятизначных числа. Найдите из этих трех чисел наименьшее.

Ответ: 53125.

Найдем все пятизначные волшебные числа. Пусть $\overline{abcde}$ — волшебное пятизначное число; в частности, $\overline{abcde}$ делится на $\overline{bcde}$. Но тогда и $10^4a = \overline{abcde} - \overline{bcde}$ делится на $\overline{bcde}$.

Докажем, что $e = 5$. Предположим противное: $e \neq 5$. Так как $e \neq 0$ по условию, то $\overline{bcde}$ не делится на 5. Но тогда 2^4a должно делится на $\overline{bcde}$. Это невозможно, так как $2^4a < 16 \cdot 10 = 160 < 1000 \leqslant \overline{bcde}$. Противоречие.

Раз $e = 5$, то $\overline{bcde}$ — нечетное число, и 5^4a кратно $\overline{bcde}$. Переберем всевозможные нечетные четырехзначные делители чисел вида $625a$, где a — цифра.

Если $a = 1, 2, 4, 8$, то таких делителей у $625a$ нет.

Если $a = 3, 6$, то подходит только 1875.

Если $a = 5$, то подходит только 3125.

Если $a = 7$, то подходит только 4375.

Если $a = 9$, то подходят 1125, 1875, 5625.

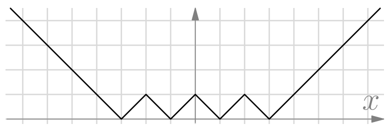
Волшебными числами являются лишь 53125, 91125, 95625. □

5/1. Множество решений уравнения $x^2 + y^2 = 1$ делит координатную плоскость на две части (всё, что внутри заданной этим уравнением окружности, и всё, что вне). А на сколько частей делит координатную плоскость множество решений уравнения

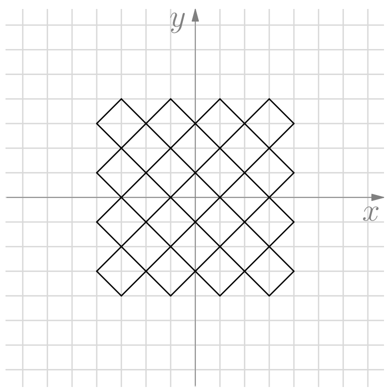
$$\Big|\big||x| - 2\big| - 1\Big| + \Big|\big||y| - 2\big| - 1\Big| = 1\,?$$

Ответ: 26.

Для начала построим график функции $f(x) = \Big|\big||x| - 2\big| - 1\Big|$. Это легко сделать, последовательно строя графики функций $|x|$, $|x| - 2$, $\big||x| - 2\big|$, $\big||x| - 2\big| - 1$, $f(x)$ (каждый следующий график отличается от предыдущего либо сдвигом вниз, либо отражением частей графика относительно оси Ox). График функции $f(x)$ нарисован ниже.



Зная вид графика функции $f(x)$, легко нарисовать на плоскости множество точек, удовлетворяющих $f(x) + f(y) = 1$.



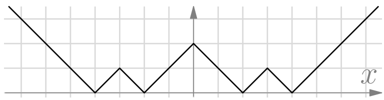
Как видно из картинки, областей получается ровно 26. □

5/2. Множество решений уравнения $x^2 + y^2 = 1$ делит координатную плоскость на две части (всё, что внутри заданной этим уравнением окружности, и всё, что вне). А на сколько частей делит координатную плоскость множество решений уравнения

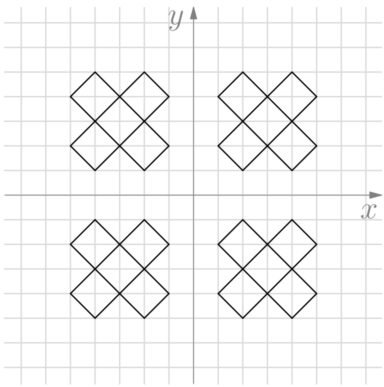
$$\Big|\big||x|-3\big|-1\Big| + \Big|\big||y|-3\big|-1\Big| = 1\,?$$

Ответ: 21.

Для начала построим график функции $f(x) = \Big|\big||x|-3\big|-1\Big|$. Это легко сделать, последовательно строя графики функций $|x|$, $|x|-3$, $\big||x|-3\big|$, $\big||x|-3\big|-1$, $f(x)$ (каждый следующий график отличается от предыдущего либо сдвигом вниз, либо отражением частей графика относительно оси Ox). График функции $f(x)$ нарисован ниже.



Зная вид графика функции $f(x)$, легко нарисовать на плоскости множество точек, удовлетворяющих $f(x) + f(y) = 1$.



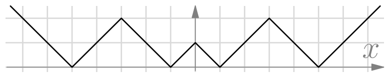
Как видно из картинки, областей получается ровно 21. □

5/3. Множество решений уравнения $x^2 + y^2 = 1$ делит координатную плоскость на две части (всё, что внутри заданной этим уравнением окружности, и всё, что вне). А на сколько частей делит координатную плоскость множество решений уравнения

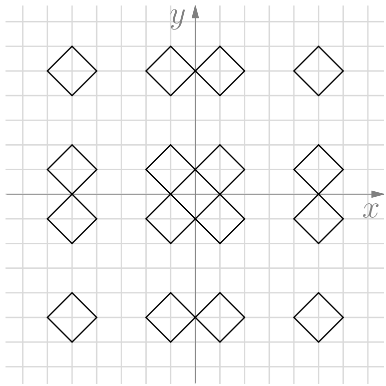
$$\Big|\big||x|-3\big|-2\Big| + \Big|\big||y|-3\big|-2\Big| = 1\,?$$

Ответ: 18.

Для начала построим график функции $f(x) = \Big|\big||x|-3\big|-2\Big|$. Это легко сделать, последовательно строя графики функций $|x|$, $|x|-3$, $\big||x|-3\big|$, $\big||x|-3\big|-2$, $f(x)$ (каждый следующий график отличается от предыдущего либо сдвигом вниз, либо отражением частей графика относительно оси Ox). График функции $f(x)$ нарисован ниже.



Зная вид графика функции $f(x)$, легко нарисовать на плоскости множество точек, удовлетворяющих $f(x)+f(y)=1$.



Как видно из картинки, областей получается ровно 18. □

6/1. На плоскости отмечены 2500 различных точек, каждая из которых красного или синего цвета. Для каждой синей точки нарисована окружность радиуса 1 с центром в этой точке. Оказалось, что на каждой нарисованной окружности лежат ровно две красные точки. Какое максимальное число отмеченных точек синего цвета могло быть?

Ответ: 2450.

Обозначим число красных точек за k. Окружности из условия задачи будем называть *синими* окружностями. Нарисуем новые *красные* окружности радиуса 1 с центром в каждой из красных точек. Заметим, что красная точка лежит на синей окружности тогда и только тогда, когда соответствующая синяя точка лежит на соответствующей красной окружности. По условию задачи на каждой синей окружности лежат ровно две красные точки. Это условие равносильно тому, что через каждую синюю точку проходят ровно две красные окружности, т. е. каждая синяя точка есть точка пересечения двух красных окружностей.

Две различные окружности на плоскости имеют не более двух общих точек, всего пар красных точек ровно $\frac{k\cdot(k-1)}{2}$, и поэтому число попарных пересечений красных окружностей не превосходит $k(k-1)$. Значит, синих точек не более чем $k(k-1)$, и тогда всего точек не более чем $k(k-1)+k=k^2$. Но всего точек 2500; следовательно, $k \geqslant 50$.

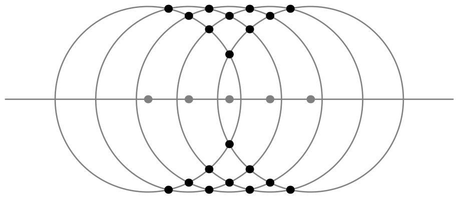


Рис. 7: к решению задачи 6/1, пример для $k=5$.

Ситуации, когда $k=50$, легко добиться: достаточно расположить 50 красных точек на одной прямой на близком расстоянии, нарисовать с центрами в этих точках окружности радиуса 1 и в точках пересечения этих окружностей расположить синие точки. Очевидно, что никакие три окружности не пересекутся в одной точке. □

6/2. На плоскости отмечены 3600 различных точек, каждая из которых красного или синего цвета. Для каждой синей точки нарисована окружность радиуса 1 с центром в этой точке. Оказалось, что на каждой нарисованной окружности лежат ровно две красные точки. Какое максимальное число отмеченных точек синего цвета могло быть?

Ответ: 3540.

Обозначим число красных точек за k. Окружности из условия задачи будем называть *синими* окружностями. Нарисуем новые *красные* окружности радиуса 1 с центром в каждой из красных точек. Заметим, что красная точка лежит на синей окружности тогда и только тогда, когда соответствующая синяя точках лежит на соответствующей красной окружности. По условию задачи на каждой синей окружности лежат ровно две красные точки. Это условие равносильно тому, что через каждую синюю точку проходят ровно две красные окружности, т. е. каждая синяя точка есть точка пересечения двух красных окружностей.

Две различные окружности на плоскости имеют не более двух общих точек, всего пар красных точек ровно $\frac{k\cdot(k-1)}{2}$, и поэтому число попарных пересечений красных окружностей не превосходит $k(k-1)$. Значит, синих точек не более чем $k(k-1)$, и тогда всего точек не более чем $k(k-1)+k=k^2$. Но всего точек 3600; следовательно, $k \geqslant 60$.

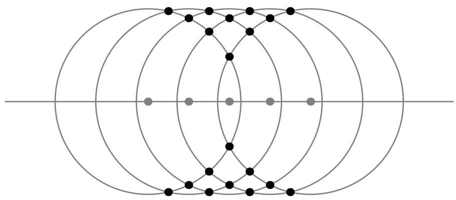


Рис. 8: к решению задачи 6/2, пример для $k = 5$.

Ситуации, когда $k = 60$, легко добиться: достаточно расположить 60 красных точек на одной прямой на близком расстоянии, нарисовать с центрами в этих точках окружности радиуса 1 и в точках пересечения этих окружностей расположить синие точки. Очевидно, что никакие три окружности не пересекутся в одной точке. □

6/3. На плоскости отмечены 4900 различных точек, каждая из которых красного или синего цвета. Для каждой синей точки нарисована окружность радиуса 1 с центром в этой точке. Оказалось, что на каждой нарисованной окружности лежат ровно две красные точки. Какое максимальное число отмеченных точек синего цвета могло быть?

Ответ: 4830.

Обозначим число красных точек за k. Окружности из условия задачи будем называть *синими* окружностями. Нарисуем новые *красные* окружности радиуса 1 с центром в каждой из красных точек. Заметим, что красная точка лежит на синей окружности тогда и только тогда, когда соответствующая синяя точках лежит на соответствующей красной окружности. По условию задачи на каждой синей окружности лежат ровно две красные точки. Это условие равносильно тому, что через каждую синюю точку проходят ровно две красные окружности, т. е. каждая синяя точка есть точка пересечения двух красных окружностей.

Две различные окружности на плоскости имеют не более двух общих точек, всего пар красных точек ровно $\frac{k\cdot(k-1)}{2}$, и поэтому число попарных пересечений красных окружностей не превосходит $k(k-1)$. Значит, синих точек не более чем $k(k-1)$, и тогда всего точек не более чем $k(k-1)+k = k^2$. Но всего точек 4900; следовательно, $k \geqslant 70$.

Ситуации, когда $k = 70$, легко добиться: достаточно расположить 70 красных точек на одной прямой на близком расстоянии, нарисовать с центрами в этих точках окружности радиуса 1 и в точках пересечения этих окружностей расположить синие точки. Очевидно, что

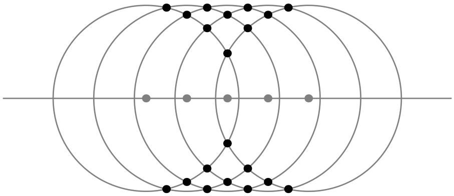


Рис. 9: к решению задачи 6/3, пример для $k = 5$.

никакие три окружности не пересекутся в одной точке. $\square$