

Олимпиада «Курчатов» — 2017 по математике
Отборочный интернет-этап
8—9 классы

Задача 1. Из числа $\underbrace{20172017\dots2017}_{100 \text{ раз по «2017»}}$ вычеркнули 100 цифр так, чтобы оставшееся число было максимальным. Какая цифра стоит на сотом месте (если считать слева) у результата?

Задача 2. Выражения

$$A = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + 99 \cdot 100 + 101$$

и

$$B = 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + \dots + 98 \cdot 99 + 100 \cdot 101$$

получены вписыванием чередующихся знаков сложения и умножения в последовательности натуральных чисел $1, 2, \dots, 101$. Найдите $B - A$.

Задача 3. Лёша внимательно наблюдает за часами и отслеживает *счастливые* моменты, когда минутная и часовая стрелка образуют угол в 66° . Каков минимальный по продолжительности промежуток времени между двумя счастливыми моментами? Ответ выразите в минутах.

Задача 4. Петя принял решение в течение семи недель заниматься физикой. Первая неделя начинается в понедельник первого сентября. Петя не готов заниматься более одного раза в неделю или более одного раза в один и тот же день недели (т. е., например, два занятия не могут приходиться на два вторника); занятия должны проходить только по нечетным числам. Сколькими способами он может организовать себе серию из 6 занятий?

Задача 5. Точки E и F являются серединами оснований AD и BC трапеции $ABCD$. Оказалось, что $AC = 8$ см, $BD = 6$ см и $EF = 5$ см. Найдите площадь трапеции $ABCD$ в квадратных сантиметрах.

Задача 6. В вершинах правильного n -угольника расставлены числа от 1 до n в некотором порядке. При этом расстояния между вершинами, в которых стоят последовательные числа, одинаковые. Такое же расстояние между вершинами, в которых стоят числа 1 и n . Оказалось, что вершина с числом 13 соседствует с вершинами, соответствующими числам 54 и 31. Найдите n .

Работа рассчитана на 240 минут

1. Карина и Петя вместе шли на олимпиаду по ОБЖ со скоростью 6 км/ч. В 9:30 Петя вспомнил, что он оставил дома включенный утюг, и побежал назад со скоростью 10 км/ч; добравшись до дома, он немедленно выключил утюг и побежал с той же скоростью догонять Карину (которая продолжала всё это время идти с неизменной скоростью). В 10:00 они встретились снова. В какой момент времени Петя выключил утюг?

2. Сколько раз встречается цифра 1 в десятичной записи числа

$$9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99\dots99}_{2017 \text{ раз «9»}} ?$$

3. Пусть $ABCDE$ — выпуклый пятиугольник такой, что $AB = AE = CD = 1$, $\angle ABC = \angle DEA = 90^\circ$ и $BC + DE = 1$. Вычислите площадь пятиугольника $ABCDE$.

4. Положительные x и y таковы, что

$$x^3 + y^3 + (x + y)^3 + 30xy = 2000.$$

Найдите $x + y$.

5. Две улитки стартуют одновременно с одного места и ползут по прямой дорожке. Первая улитка 30 минут ползёт со скоростью 2 мм/мин, затем 20 минут не двигается, а затем 50 минут ползёт со скоростью 3 мм/мин и приходит к финишу одновременно со второй улиткой. Найдите среднюю скорость второй улитки.

6. Льдинка объёмом 30 мл плавает в стакане с водой. Внутри льдинки имеется полость, заполненная воздухом. После того, как льдинка частично растаяла, её объём уменьшился на 10 % от начального, а объём вытесненной воды изменился на 20 % от начального. Найдите объём полости (воздух в полости всё время и со всех сторон окружён льдом).

7. Однородная линейка лежит на горизонтальном столе так, что один её конец выступает за край стола. К выступающему концу линейки привязан груз массой 30 г. Если длина выступающего конца не превышает 5 см, то линейка находится в равновесии (иначе она опрокидывается). Длина всей линейки 30 см. Найдите массу линейки.

8. Сколько килограммов каменного угля нужно сжечь в печи с КПД 30 %, чтобы получить из 50 дм³ льда, взятого при температуре -15°C , воду при температуре 35°C ? Удельная теплота сгорания угля 27 МДж/кг, удельная теплота плавления льда 0,33 МДж/кг, удельная теплоёмкость воды 4,2 кДж/(кг·°C), удельная теплоёмкость льда 2,1 кДж/(кг·°C), плотность льда 0,9 г/см³.

Работа рассчитана на 240 минут

1. Карина и Петя вместе шли на олимпиаду по ОБЖ со скоростью 6 км/ч. В 9:30 Петя вспомнил, что он оставил дома включенный утюг, и побежал назад со скоростью 10 км/ч; добравшись до дома, он немедленно выключил утюг и побежал с той же скоростью догонять Карину (которая продолжала всё это время идти с неизменной скоростью). В 10:00 они встретились снова. В какой момент времени Петя выключил утюг?

2. Сколько раз встречается цифра 1 в десятичной записи числа

$$9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99\dots99}_{2017 \text{ раз «9»}} ?$$

3. Пусть $ABCDE$ — выпуклый пятиугольник такой, что $AB = AE = CD = 1$, $\angle ABC = \angle DEA = 90^\circ$ и $BC + DE = 1$. Вычислите площадь пятиугольника $ABCDE$.

4. Положительные x и y таковы, что

$$x^3 + y^3 + (x + y)^3 + 30xy = 2000.$$

Найдите $x + y$.

5. Две материальные точки начинают движение вдоль оси x в нулевой момент времени. Даны законы движения точек: $x_1 = 5 + t$, $x_2 = 8 - t - t^2$ (все величины в СИ). Найдите относительную скорость точек в момент встречи.

6. Брусок находится на горизонтальной поверхности, коэффициент трения бруска о которую равен 0,2. К бруску прикреплена горизонтальная пружина жёсткостью 120 Н/м, за другой конец которой тянут с постоянной горизонтальной силой. При этом удлинение пружины равно 5 мм. Брусок движется равномерно и прямолинейно. Найдите массу бруска. Ускорение свободного падения примите равным 10 м/с^2 .

7. Льдинка с воздушной полостью внутри плавает в измерительном цилиндре, заполненном спиртом, не касаясь дна или стенок цилиндра. Уровень жидкости в цилиндре находится напротив отметки 120 мл. После того, как льдинка растаяла, уровень жидкости опустился до отметки 110 мл. Найдите плотность получившегося в цилиндре раствора. Плотность чистого спирта $789,3 \text{ кг/м}^3$.

8. По длинной прямой нихромовой проволоке идёт электрический ток силой 100 мА. На каком расстоянии друг от друга нужно приложить к проволоке щупы идеального вольтметра, чтобы он показал напряжение 10 мВ? Удельное сопротивление нихрома $1,1 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{м}$, площадь поперечного сечения проволоки $0,55 \text{ мм}^2$.