Олимпиада «Курчатов» — 2017 по математике

11 класс ♢ 19 марта 2017 г.

Задача 1. На доске было выписано несколько чисел, их среднее арифметическое было равно M. К ним дописали число 15, при этом среднее арифметическое выросло до $M+2$. После этого дописали ещё и число 1, и среднее арифметическое уменьшилось до $M+1$. Сколько чисел было на доске изначально? (Найдите все варианты и докажите, что других нет.)

Задача 2. Сколько решений в вещественных числах имеет уравнение

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi x}{1+x+x^2} = \sqrt{3}?$$

Задача 3. На сторонах AB, AD квадрата $ABCD$ выбраны точки X и Y так, что $AX = DY$. Прямые BC и DX пересекаются в точке P, прямые CD и BY — в точке Q. Докажите, что точки P, Q, A лежат на одной прямой.

Задача 4. Каждый день более половины жителей Цветочного города едят мороженое. Докажите, что найдется 10 жителей Цветочного города, таких что в течение каждого из последних 2017 дней хотя бы один из них ел мороженое. (В Цветочном городе живет не менее 10 жителей.)

Задача 5. Пусть d_1, d_2, …, d_n — это все натуральные делители числа $10! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 10$. Найдите сумму

$$\frac{1}{d_1+\sqrt{10!}} + \frac{1}{d_2+\sqrt{10!}} + \ldots + \frac{1}{d_n+\sqrt{10!}}\,.$$

Задача 6. Пусть A и B — различные точки, принадлежащие линии пересечения перпендикулярных плоскостей π_1 и π_2. Точка C принадлежит плоскости π_2, но не принадлежит π_1. Обозначим через P точку пересечения биссектрисы угла ACB с прямой AB и через ω окружность с диаметром AB в плоскости π_1. Плоскость π_3, содержащая CP, пересекает окружность ω в точках D и E. Докажите, что CP — биссектриса угла DCE.