Олимпиада «Курчатов» — 2017 по математике
Отборочный интернет-этап
10—11 классы

Задача 1. Выражения

$$A = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \ldots + 2015 \cdot 2016 + 2017$$

и

$$B = 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + \ldots + 2014 \cdot 2015 + 2016 \cdot 2017$$

получены вписыванием чередующихся знаков сложения и умножения в последовательности натуральных чисел $1, 2, \ldots, 2017$. Найдите $B - A$.

Задача 2. Леша внимательно наблюдает за часами и отслеживает *счастливые* моменты, когда минутная и часовая стрелка образуют угол в 125°. Каков минимальный по продолжительности промежуток времени между двумя счастливыми моментами? Ответ выразите в минутах.

Задача 3. Сколько действительных решений имеет уравнение $2x = \sin(2017\pi x)$?

Задача 4. В физико-математическом конкурсе предлагается 20 задач по математике и 17 по физике. Каждый из школьников, участвующих в конкурсе, выбрал пару задач: одну по математике и одну по физике. При этом для каждого школьника хотя бы одна из выбранных им задач выбрана не более чем одним другим школьником. Какое максимальное количество школьников могло участвовать в конкурсе?

Задача 5. В вершинах правильного n-угольника расставлены числа от 1 до n в некотором порядке. При этом расстояния между вершинами, в которых стоят последовательные числа, одинаковые. Такое же расстояние между вершинами, в которых стоят числа 1 и n. Оказалось, что вершина с числом 20 соседствует с вершинами, соответствующими числам 158 и 45. Найдите n.

Задача 6. Тетраэдр $ABCD$ таков что $\angle BAD = 60^\circ$, $\angle BAC = 40^\circ$, $\angle ABD = 80^\circ$, и угол между ребрами AB и CD равен 90°. Найдите $\angle ABC$. Ответ выразите в градусах.

Работа рассчитана на 240 минут

1. В ряд выписываются все натуральные числа, начиная с единицы, в записи которых участвуют лишь цифры 0, 1, 2 и 7. На каком месте в этом ряду появится число 2017?

2. Решите систему уравнений в действительных числах

$$\begin{cases} \{a\}+[b]+\{c\}=2{,}0, \\ \{b\}+[c]+\{a\}=0{,}1, \\ \{c\}+[a]+\{b\}=1{,}7, \end{cases}$$

где $[x]$ — целая часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x, а $\{x\} = x-[x]$ — дробная часть числа x.

3. На ста карточках написаны числа от 1 до 200. На каждой карточке по два числа: одно четное и одно нечетное, отличающиеся на 1. Вася выбрал 21 карточку. Могла ли сумма 42-х чисел на них оказаться равна 2017?

4. В тетраэдре $ABCD$ $\angle BAC = \angle ACD$ и $\angle ABD = \angle BDC$. Докажите, что $AB = CD$.

5. Две материальные точки начинают движение вдоль оси x в нулевой момент времени. Даны законы движения точек: $x_1 = 17-2t$, $x_2 = 7-t+2t^2$ (все величины в СИ). Найдите относительную скорость точек в момент встречи.

6. На тело, изначально двигавшееся со скоростью 1 м/с, в течение 10 секунд действовала постоянная сила 1 Н, направленная противоположно начальной скорости тела. Конечная скорость тела равна 3 м/с. Найдите массу тела.

7. Масса медной проволоки равна 445 г, а сопротивление между концами 0,85 Ом. Найдите длину этой проволоки, если плотность меди 8,9 г/см^3, а удельное сопротивление меди $1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

8. Угол падения луча на стеклянную пластину равен 40°. Луч падает из воздуха, показатель преломления стекла 1,5. Найдите величину угла между отражённым и преломлённым лучом.

Работа рассчитана на 240 минут

1. В ряд выписываются все натуральные числа, начиная с единицы, в записи которых участвуют лишь цифры 0, 1, 2 и 7. На каком месте в этом ряду появится число 2017?

2. Решите систему уравнений в действительных числах

$$\begin{cases} \{a\}+[b]+\{c\}=2{,}0,\\ \{b\}+[c]+\{a\}=0{,}1,\\ \{c\}+[a]+\{b\}=1{,}7, \end{cases}$$

где $[x]$ — целая часть числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x, а $\{x\} = x-[x]$ — дробная часть числа x.

3. На ста карточках написаны числа от 1 до 200. На каждой карточке по два числа: одно четное и одно нечетное, отличающиеся на 1. Вася выбрал 21 карточку. Могла ли сумма 42-х чисел на них оказаться равна 2017?

4. В тетраэдре $ABCD$ $\angle BAC=\angle ACD$ и $\angle ABD=\angle BDC$. Докажите, что $AB=CD$.

5. На тело массой 4 кг в течение 10 секунд действовала сила 2 Н, постоянная по направлению. Конечная скорость тела перпендикулярна начальной и равна 4 м/с. Найдите модуль начальной скорости тела.

6. Концы длинной прямой нихромовой проволоки подсоединены с помощью подводящих проводов с малым сопротивлением к идеальному источнику постоянного тока (прибору, обеспечивающему одну и ту же силу тока через подключенный к нему проводник, вне зависимости от сопротивления этого проводника). Источник настроен на силу тока 2,0 мкА. На каком расстоянии нужно приложить к проволоке два щупа амперметра с внутренним сопротивлением 1,00 Ом, чтобы показания амперметра составили 1,0 мкА? Удельное сопротивление нихрома $1{,}1\cdot10^{-6}$ Ом·м, площадь поперечного сечения проволоки 0,275 мм^2.

7. Льдинка с воздушной полостью внутри плавает в мерном цилиндре, заполненном спиртом, не касаясь дна или стенок цилиндра. Уровень жидкости в цилиндре находится напротив отметки 230 мл. После того, как льдинка растаяла, уровень жидкости опустился до отметки 215 мл. Найдите плотность получившегося в цилиндре раствора. Плотность чистого спирта 789,3 кг/м^3.

8. Одноатомный идеальный газ нагрели изобарно. Переданное газу количество теплоты равно 50 Дж. Найдите изменение внутренней энергии газа.