Олимпиада «Курчатов» — 2017 по математике
7 класс, 19 марта 2017 г.

$+$ Полное решение любой задачи оценивается в 7 баллов.

7 класс

1. Автобусы из Москвы в Орёл выходят в начале каждого часа (в 00 минут). Автобусы из Орла в Москву выходят в середине каждого часа (в 30 минут). Поездка между городами занимает 5 часов. Сколько автобусов из Орла встретит автобус, вышедший из Москвы, на своем пути?

Ответ: 10.

Ясно, что все автобусы из Москвы встретят одинаковое число автобусов из Орла, и можно считать, что в автобус из Москвы отправился в 12:00. Легко понять, что он встретится с автобусами, выехавшими из Орла в 7:30, 8:30, ..., 15:30, 16:30 и только с ними. Таких автобусов 10. $\square$

$\pm$ Правильное рассуждение с арифметической ошибкой, приводящее к неправильному ответу. 4-5 баллов

$\mp$ Вычислена частота встреч (раз в полчаса), но ответ неправильный. 3 балла

$-.$ Правильный ответ без объяснения. 1 балл

2. Три щедрых друга, у каждого из которых есть конфеты, перераспределяют их следующим образом: Вася отдает часть своих конфет Пете и Коле, отчего количества конфет у них удваиваются. После этого Петя отдает часть своих конфет Коле и Васе, отчего количества конфет у них тоже удваиваются. Наконец, Коля отдает часть своих конфет Васе и Пете, у которых опять же количества удваиваются. Оказалось, что у Коли и в начале, и в конце было 36 конфет. Сколько всего конфет у мальчиков?

Ответ: 252.

Проследим за количеством конфет у Коли. После первого перераспределения у него их 72, после второго — 144. Следовательно, он раздал $144 - 36 = 108$ конфет и при этом количество конфет у Васи и Пети удвоилось. То есть всего конфет у Васи, Пети и Коли вместе $2 \cdot 108 + 36 = 252$. $\square$

$\pm$ Правильное рассуждение с арифметической ошибкой, приводящее к неправильному ответу. 5 баллов

$-.$ Правильный ответ без обоснования (пример обоснованием не считается). 1 балл

3. В популярной интеллектуальной игре «Столкновение умов» принимает участие 10 человек. К концу игры каждый игрок набирает целое число очков.

Оказалось, что в полуфинале все количества набранных игроками очков имеют разные последние цифры. Докажите что в финале игры (где игроки суммарно наберут вдвое больше очков, чем в полуфинале) такой ситуации произойти не может.

Предположим противное — по итогам финала игроки набрали такие количества очков, что их последние цифры различны, то есть равны 0, 1, 2, …, 9 в некотором порядке. Тогда последняя цифра суммы всех очков совпадает с последней цифрой суммы $0 + 1 + 2 + \ldots + 9 = 45$. С другой стороны, по условию эта сумма — число четное. Противоречие. □

−. В решении присутствует идея вычисления последней цифры суммы без дальнейших продвижений. 2 балла

– Задача решена в предположении, что каждый участник в финале наберет вдвое больше очков, чем в полуфинале. 0 баллов

4. На конференцию по вопросам применения магии в народном хозяйстве прибыли 30 волшебников, каждый из которых знаком ровно с 19 участниками конференции. Оказалось, что 15 самых могущественных волшебников знакомы друг с другом, каждый с каждым. Докажите, что всех волшебников можно рассадить за два стола так, чтобы любые два волшебника, сидящие за одним столом, были знакомы друг с другом.

Достаточно доказать, что 15 «немогущественных» волшебников также знакомы друг с другом.

Посчитаем количество пар волшебников, которые не знакомы друг с другом. С одной стороны, их ровно $30 \cdot 10/2 = 150$, так как каждый не знаком с 10 другими, и каждую такую пару незнакомых мы считаем по два раза.

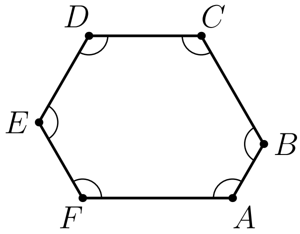
С другой стороны, каждый могущественный волшебник знаком с 5 и не знаком с 10 немогущественными. Следовательно, пар незнакомых могущественны немогущественный ровно $15 \cdot 10 = 150$.

Получается, никаких других пар незнакомых волшебников быть не может, то есть среди немогущественных волшебников также все знакомы друг с другом. □

+. Правильное рассуждение с арифметической ошибкой, не повлиявшей на ход решения. 6 баллов

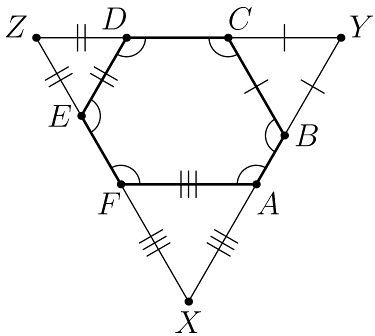
−. В решении присутствует утверждение о том, что немогущественные волшебники дружат каждый с каждым, но это не обосновано формально, либо приведен пример, когда это так. 2 балла

5. Все углы шестиугольника $ABCDEF$ равны.



Докажите, что

$$AB - DE = EF - BC = CD - FA\,.$$



Проведем прямые AB, CD, EF до пересечения друг с другом, точки пересечения обозначим X, Y, Z (рис.). Треугольники AXF, BYC, DZE равнобедренные, так как углы при их основаниях AF, BC, DE равны как смежные с равными углами. Из сумм углов этих треугольников следует, что равны также углы AXF, BYC, DZE. Значит, треугольник XYZ — равносторонний, и все его углы равны 60°. Но тогда треугольники AXF, BYC, DZE тоже равносторонние. Посчитаем отрезки:

$$XY = XZ \quad \Longrightarrow \quad XA + AB + BY = XF + FE + EZ \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad AB + BC = EF + DE \quad \Longrightarrow \quad AB - DE = EF - BC\,.$$

Третье равенство получается аналогичным образом. □

+. В решении есть случаи, опирающиеся на картинку, но в целом рассуждение правильное. 6 баллов

−. Присутствует картинка с правильным дополнительным построением, но задача не решена. 2 балла