9 класс

9.1. Известна сумма куба и квадрата некоторого нецелого числа. Всегда ли можно определить знак исходного числа?

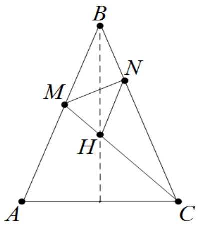
Ответ. Нет, например, числа 1/3 и -2/3 дают одинаковую сумму 4/27.

Критерий. Контрпример 7 баллов. Обоснование не требуется.

9.2. Натуральное число называется *палиндромом*, если оно не изменяется при выписывании его цифр в обратном порядке (например, числа 4, 55, 626 — палиндромы, а 20, 201, 2016 — нет). Докажите, что любое число вида 2016...2016 (группа цифр 2016 повторена несколько раз) можно представить в виде произведения двух палиндромов.

Решение. См. 8-3.

9.3. Дан равнобедренный треугольник ABC. На боковой стороне AB отметили такую точку M, что $CM=AC$. Затем на боковой стороне BC отметили такую точку N, что $BN=MN$, и провели биссектрису NH в треугольнике CNM. Докажите, что H лежит на медиане BK треугольника ABC.



Решение. В равнобедренных треугольниках ACM и MNB $\angle AMC = \angle A$ и $\angle BMN = \angle B$. Значит, $\angle CMN = 180° - \angle AMC - \angle BMN = 180° - \angle A - \angle B = \angle C = \angle A = \angle AMC$. Таким образом, H является точкой пересечения биссектрис углов AMN и MNC. Поэтому расстояние от H до прямой MN равно расстояниям от H до прямых AB и BC соответственно. Итак, точка H равноудалена от прямых AB и BC, значит, BH – биссектриса угла ABC. А поскольку треугольник равнобедренный, то биссектриса совпадает с медианой.

9.4. Через точку с координатами (9, 9) проведены прямые (включая параллельные осям координат), которые делят плоскость на углы в 9°. Найдите сумму абсцисс точек пересечения этих прямых с прямой $y = 10 - x$.

Ответ. 190. **Решение.** Картинка симметрична относительно прямой $y = x$, поэтому сумма абсцисс равна сумме ординат. Через точку (9, 9) проведено 20 прямых, прямая $y = 20 - x$ пересекает 19 из них. Для каждой точки на прямой $y = 20 - x$ сумма координат равна 20, значит, общая сумма абсцисс и ординат равна 380, а сумма абсцисс – вдвое меньше.
Критерий. 2 балла за верный ответ без верного обоснования. 4 балла, если все идеи найдены, но ответ неверный из-за неправильного подсчета количества точек пересечения (например, школьник считает что их 20 или 40).

9.5. Есть 64 шашки трех цветов, разбитые на пары так, что в каждой паре цвета шашек различны. Докажите, что все шашки можно расставить на шахматной доске так, чтобы шашки в каждом двуклеточном прямоугольнике были разных цветов.

Решение. Разложим шашки на три одноцветные кучки. В каждой будет не более 32 шашек. Разложим теперь самую большую кучку на белые поля, заполняя горизонтали начиная сверху. Вторую по величине кучку разложим на черные поля, заполняя горизонтали начиная снизу.

Назовем ряд *полным*, если в него попали 4 шашки из 1-й кучки или 4 шашки из второй кучки.

Из первой кучки не более 3 шашек не попадут в полный ряд, и из второй кучки — тоже не более 3. Но всего в этих двух кучках — более 2/3 всех шашек, то есть не менее 43. Значит, не менее 43-6=37 шашек — в полных рядах. Тогда полных рядов — не менее 9. Но всего рядов 8, значит, есть особый ряд, куда попали по 4 шашки из обеих кучек. Свободные поля разных цветов лежат по разные стороны особого ряда, и между собой не соприкасаются. Разложим на них шашки третьей кучки.