8 класс

8.1. Если у прямоугольника ширину увеличить на 30%, а высоту уменьшить на 20%, его периметр не изменится. А уменьшится или увеличится периметр, и на сколько процентов, если вместо этого у исходного прямоугольника ширину уменьшить на 20%, а высоту увеличить на 30%?

Ответ. Увеличится на 10%. **Решение.** Обозначим ширину исходного прямоугольника s, а высоту h. В первом случае измененные ширина и высота будут 1,3s и 0,8h соответственно. По условию $2(s+h)=2(1{,}3s+0{,}8h)$, откуда $h=1{,}5s$. Это значит, что исходный периметр равен $2(s+1{,}5s)=5s$. Во втором случае периметр будет $2(0{,}8s+1{,}3h) = 2(0{,}8s+1{,}3\cdot 1{,}5s)=5{,}5s$. Это число больше 5s на 0,5s, то есть на 10%.

8.2. Диагонали параллелограмма ABCD пересекаются в точке O. В треугольниках OAB, OBC, OCD проведены медианы OM, OM', OM” и биссектрисы OL, OL', OL” соответственно. Докажите, что углы MM'M” и LL'L” равны.

Решение. Пусть AB=a, BC=b, OB=c, AO=OC=d. По теореме о биссектрисе BL:AL=BO:AO <=> BL:(a – BL)=c:d <=> BL=ac/(c+d). Аналогично, BL'=bc/(c+d). Значит, BL:BL'=a:b=BA:BC=BM:BM'. Значит, треугольники LBL' и MBM' подобны ввиду совпадения угла B и пропорциональности прилегающих к этому углу сторон. Поэтому LL'||MM'. Аналогично, L'L”||M'M”. Стороны углов MM'M” и LL'L” параллельны и сонаправлены, поэтому эти углы равны.

8.3. Натуральное число называется *палиндромом*, если оно не изменяется при выписывании его цифр в обратном порядке (например, числа 4, 55, 626 — палиндромы, а 20, 201, 2016 — нет). Докажите, что любое число вида 2016...2016 (группа цифр 2016 повторена несколько раз) можно представить в виде произведения двух палиндромов.

Решение. 2016...2016 = 2016·100010001...01, где единицы перемежаются тройками нулей, и число единиц равно числу групп 2016 в исходном числе. Правое число — палиндром, а левое — нет. Но 2016=252·8 — произведение двух палиндромов. Умножив правое число на один из этих палиндромов, по-прежнему получим палиндром. Отсюда два возможных варианта в общем случае: 25202520...0252·8 или 800080...8·252.

Критерий. За разложение 2016·100010001...01 — один балл. Для полного балла достаточно только одного ответа.

8.4. На олимпиаду пришли 300 учеников из не менее чем 4 школ. Докажите, что их можно разбить на команды по 3 человека в каждой так, чтобы в каждой команде либо все три ученика были из одной школы, либо все три – из разных школ.

Решение. Если из какой школы пришло больше трёх учеников, то отделяем от них команды по три пока возможно. не останется 1, 2 или 3 ученика. Так сделаем со всеми школами. В каждой школе остаток будет 0, 1 или 2 ученика. Поскольку общее число учеников кратно 3, и мы отделяли тройками, сумма остатков тоже кратна 3. Поэтому один ненулевой остаток быть не может. Рассмотрим случаи.

Случай 1. Есть два ненулевых остатка. Это могут быть только 1 и 2 из школ А и Б. Вернем по тройке учеников из двух других школ В и Г, и сформируем смешанные команды: две БВГ и одну АВГ.

Случай 2. Есть три или более ненулевых остатков. Формируем смешанные команды, беря по ученику из тех трех школ, где остатки на данный момент наибольшие. Это означает, что если после взятия где-то остались 2 ученика, то мы брали только из остатков по 2. То есть, если какой-то остаток стал 0, то остальные не больше 1. Рассмотрим теперь момент, когда останется менее трех ненулевых остатков. Но две или одна единица остаться не может (сумма не кратна 3), поэтому все остатки стали 0, то есть, все ученики распределены.

Критерий. 2 балла если сведено к случаю остатков и указано, что сумма остатков кратна 3. 2 балла за верный алгоритм без доказательства, что этот алгоритм всегда работатет. Но если и то, и другое, то не 4 балла, а только 3.

8.5. Через точку с координатами (2, 2) проведены прямые (включая две параллельные осям координат), которые делят плоскость на углы в 18°. Найдите сумму абсцисс точек пересечения этих прямых с прямой $y = 2016 - x$.

Ответ. 10080. **Решение**. Картинка симметрична относительно прямой $y = x$, поэтому сумма абсцисс равна сумме ординат. Через точку (2, 2) проведено 10 прямых, прямая $y = 2016 - x$ пересекает их все. Для каждой точки на прямой $y = 2016 - x$ сумма координат равна 2016, значит, общая сумма абсцисс и ординат равна 20160, а сумма абсцисс – вдвое меньше.

Критерий. 2 балла за верный ответ без верного обоснования. 5 баллов, если все идеи найдены, но ответ неверный из-за неправильного подсчета количества точек пересечения (например, школьник считает что их 9 или 18).