11 класс

1. У двух прямоугольных треугольников совпадают площади и периметры. Обязательно ли эти треугольники равны?

Ответ. Да. **Решение.** Пусть a и b – катеты треугольника, P – его периметр, S – площадь. Тогда ab/2=S и $a+b+\sqrt{a^2+b^2}=P$. Перенеся во втором равенстве a и b в правую часть и возведя в квадрат, получим $a+b=\frac{P^2+4S}{2P}$. Но зная сумму и произведение чисел a и b, мы можем найти их как корни квадратного уравнения с соответствующими коэффициентами. По заданным площади и периметру коэффициенты определяются однозначно. Значит, катеты тоже определяются однозначно, и треугольники равны.

2. Найдите наименьшее натуральное n такое, что sin n°= sin ($2016n^\circ$).

Ответ. 72. **Решение.** sinA=sinB <=> 1) $B-A=360k^\circ$ или 2) $A+B=180^\circ+360k^\circ$, где k – целое. У нас $A=n^\circ$, $B=2017n^\circ$.

Случай 1. 2015n=360k <=> 403n=72k. Поскольку 403 и 72 взаимно просты, то n кратно 72. Значит, наименьшее n=72.

Случай 2. 2017n=180(2k+1). 2017n кратно 180. Поскольку 2017 и 180 взаимно просты, то n кратно 180. Значит, наименьшее n=180.

Критерий. Разобран только один случай, но ответ верный: 3 балла. Разобран случай, дающий ответ 180: 1 балл.

3. Имеется 288 внешне одинаковых монет весами 7 и 8 грамм (есть и те, и другие). На чаши весов положили по 144 монеты так, что весы в равновесии. За одну операцию можно взять с чаш любые две группы из одинакового числа монет и поменять их местами. Докажите, что можно не более, чем за 11 операций сделать так, чтобы весы *не были* в равновесии.

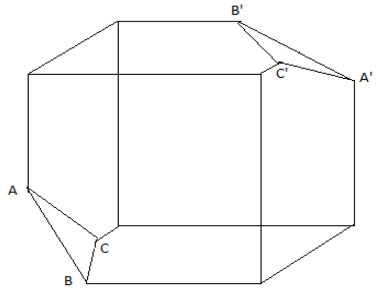
Решение. Будем менять группы монет с разных чаш. Пусть у нас при каждой из следующих замен равновесие сохраняется. Поменяем по одной монете. Они одинаковы. Поменяем одну из этих монет с новой. Теперь три монеты одинаковы: пара на одной и одна — на другой чаше. Поменяем эту пару с парой еще нетронутых. Теперь на одной чаше пара одинаковых, на другой — тройка таких же монет. Поменяем тройку с тройкой нетронутых. Теперь на одной чаше тройка одинаковых монет, на другой — пять таких же монет. Продолжая в том же духе, после k-го шага получим на одной чаше Φ_k одинаковых монет, а на другой — Φ_{k+1} таких же монет, где Φ_i — i-ое число Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144. Итак, после 11-го шага на одной из чаш все монеты одинаковы. Но тогда они таковы же и на другой, что по условию невозможно.

Критерий. Если алгоритм указан верно, найдено соображение с числами Фибоначчи, но неверный ответ из-за ошибки в подсчетах (например, получилось что хватит 10 шагов) — оценить решение в 4 балла.

4. Назовем натуральное число *модным*, если в его записи встречается группа цифр 2016 (например, числа 32016, 1120165 модны, а 3, 216, 20516 — нет). Докажите, что всякое натуральное число можно получить как частное от деления модного числа на модное.

Решение. Пусть надо получить k-значное число N. Среди 10^k чисел от 20160...0 (k нулей) до 20169...9 (k девяток) хотя бы одно делится на N. Обозначим его A, а A/N=B. Пусть число C=2016N – m-значно. Припишем к B справа m-4 нуля и 2016, получим делитель D — модное число. Произведение D·N записывается как A, к которому справа приписано число 2016N, это тоже модное число. Итак, N – отношение двух модных.

5. У куба выбрали две противоположные вершины M и M' и плоскими сечениями ABC и A'B'C' отрезали от него две треугольные пирамиды MABC и M'A'B'C'. Получился восьмигранник (см. рис.) Три расстояния оказались попарно различны: между прямыми AB и A'B', между прямыми BC и B'C' и между прямыми AC и A'C'. Докажите, что у прямых AA', BB' и CC' есть общая точка.



Решение. Пусть r – длина ребра куба. Каждая из пар прямых лежит на двух противоположных гранях куба. Через них проходят параллельные плоскости на расстоянии r друг от друга. Если эти прямые не параллельны, то они скрещиваются; в таком случае проходящая через них пара параллельных плоскостей определяется однозначно, и расстояние между прямыми равно расстоянию между плосокостями, то есть r. По условию, по крайней мере два расстояния не равны r, то есть в двух парах прямые параллельны (скажем AB||A'B', AC||A'C'). Тогда по признаку параллельности плоскостей параллельны плоскости ABC и A'B'C'. Но тогда параллельны между собой и прямые BC и B'C'. Иначе получилось бы, что через пару скрещивающихся прямых BC и B'C' проходят две пары параллельных плоскостей: пара противоположных граней и пара ABC и A'B'C'. А такое невозможно.

Итак, все три пары состоят из параллельных прямых. Значит, прямые AB и A'B' лежат в одной плоскости и имеют общую точку X, прямые BC и B'C' лежат в одной плоскости и имеют общую точку Y и, наконец, прямые AC и A'C' лежат в одной плоскости и имеют общую точку Z. Но, если среди этих точек есть различные, то все три точки различны, и все три прямые лежат в одной плоскости XYZ, что неверно. Значит, все эти прямые проходят через одну точку.

Критерий. За доказательство параллельности плоскостей ABC и A'B'C' – не менее 3 баллов.

6. Дан квадратный трехчлен x^2+bx+c. Докажите, что найдется такое иррациональное x, при котором значение x^2+bx+c – рационально.

Решение. Обозначим $P(x)=x^2+bx+c$. Выберем достаточно большое рациональное число r, чтобы у $P(x)–r$ были два корня: x_1 и x_2. Тогда по теореме Виета $P(x)–r = (x–x_1) (x–x_2)$. Если хотя бы один из корней – иррационален (скажем, x_1), то $P(x_1)=r$ – рационально, то есть x_1 – искомое. Пусть оба корня – рациональны. Тогда $P(x)–r = (x–x_3)^2+d$, где x_3 и d – рациональны. Подставив иррациональное число $x=x_3+\sqrt{2}$, получим $P(x) = 2+d+r$ – рациональное.