10 класс

10.1. Известна сумма четвертой и пятой степени некоторого нецелого числа. Всегда ли можно определить знак исходного числа?

Ответ. Нет. Исследование графика $f(x)=x^4+x^5$ показывает, что она непрерывна, возрастает при $x<-0{,}8$ и $x>0$, убывает при $-0{,}8<x<0$. Соответственно, $f(-0{,}8)=0{,}08192$ – локальный максимум, $f(0)=0$ – локальный минимум. При $0\le x\le 1$ функция принимает все значения от 0 до 2, в том числе и значение 0,08192. Оно, очевидно, принимается при нецелом x. Итак, значение 0,08192 принимается как при нецелом отрицательном числе -0,8, так и при некотором нецелом болодительном числе. Значит, по значению знак определить нельзя!

Критерий. 5 баллов, если объяснено, что при некотором a уравнение $x^4+x^5=a$ имеет как положительный, так и отрицательный корень, но не доказано, что оба корня не целые.

10.2. Натуральное число называется *палиндромом*, если оно не изменяется при выписывании его цифр в обратном порядке (например, числа 4, 55, 626 — палиндромы, а 20, 201, 2016 — нет). Докажите, что любое число вида 2016...2016 (группа цифр 2016 повторена несколько раз) можно представить в виде произведения двух неоднозначных палиндромов.

Решение. 2016...2016 = 2016·100010001...01, где единицы перемежаются тройками нулей, и число единиц равно числу групп 2016 в исходном числе. Правое число — палиндром, а левое — нет. Но 2016=252·8 — произведение двух палиндромов. Умножив правое число на 8, по-прежнему получим палиндром. Отсюда пример: 800080...8·252.

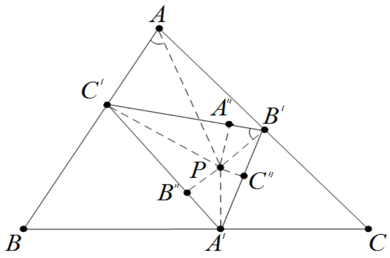
Критерий. За разложение 2016·100010001...01 — один балл.

10.3. Дан треугольник ABC . Из точки P внутри него опущены перпендикуляры PA', PB', PC' на стороны BC, CA, AB соответственно. Затем из точки P опущены перпендикуляры PA'', PB'' на стороны $B'C'$ и $C'A'$ соответственно. Докажите, что

$PA{\cdot}PA'{\cdot}PA'' = PB{\cdot}PB'{\cdot}PB''$.

Решение. Поскольку углы $PB'A$ и $PC'A$ – прямые, то четырёхугольник $PB'AC'$ вписан в окружность с диаметром PA, откуда $\angle PB'C' = \angle PAC'$. Поэтому прямоугольные треугольники $PB'A''$ и PAC' подобны и PB':PA=PA'':PC'. Это равносильно $PB'{\cdot}PC'=PA{\cdot}PA''$. Домножив обе части на PA', получим равенство

$PA{\cdot}PA'{\cdot}PA'' = PA'{\cdot}PB'{\cdot}PC'$. Аналогично доказывается, что $PB{\cdot}PB'{\cdot}PB'' = PA'{\cdot}PB'{\cdot}PC'$. Из этих двух равенств и следует равенство $PA{\cdot}PA'{\cdot}PA'' = PB{\cdot}PB'{\cdot}PB''$.



10.4. Через точку с координатами (10, 9) проведены прямые (включая параллельные осям координат), которые делят плоскость на углы в 10°. Найдите сумму абсцисс точек пересечения этих прямых с прямой $y = 101 - x$.

Ответ. 867. **Решение**. Сдвинем всю картинку на 1 влево. Получим набор прямых, проходящих через точку (9, 9) и пересекающих прямую $y = 100 - x$. Картинка станет симметрична относительно прямой $y = x$, поэтому на ней сумма абсцисс равна сумме ординат. Через точку (9, 9) проведено 18 прямых, прямая $y = 100 - x$ пересекает 17 из них. Для каждой точки на прямой $y = 100 - x$ сумма координат равна 100, значит, общая сумма абсцисс и ординат равна 1700, а сумма абсцисс – вдвое меньше, то есть 850. Однако на симметричной картинке каждая абсцисса на 1 меньше исходной, то есть искомая сумма равна 850+17=867.

Критерий. Не менее 1 балла за верный ответ без верного обоснования. 1 балл за идею сдвинуть картинку так, чтобы она стала симметричной относительно осей. 5 баллов, если все идеи найдены, но ответ неверный из-за неправильного подсчета количества точек пересечения (например, школьник считает что их 18 или 36).

10.5. Есть 64 шашки нескольких цветов, разбитые на пары так, что в каждой паре цвета шашек различны. Докажите, что все шашки можно расставить на шахматной доске так, чтобы шашки в каждом двуклеточном прямоугольнике были разных цветов.

Решение. Разложим шашки на кучки по цветам.

Случай 1) Кучек две. Тогда шашек в них поровну. Разложим один цвет на белые поля, а второй — на черные.

Случай 2) Кучек 3. В каждой будет не более 32 шашек. Разложим теперь самую большую кучку на белые поля, заполняя горизонтали начиная сверху. Вторую по величине кучку разложим на черные поля, заполняя горизонтали начиная снизу.

Назовем ряд *полным*, если в него попали 4 шашки из 1-й кучки или 4 шашки из второй кучки.

Из первой кучки не более 3 шашек не попадут в полный ряд, и из второй кучки — тоже не более 3. Но всего в этих двух кучках — более 2/3 всех шашек, то есть не менее 43. Значит, не менее 43-6=37 шашек — в полных рядах. Тогда полных рядов — не менее 9. Но всего рядов 8, значит, есть особый ряд, куда попали по 4 шашки из обеих кучек. Свободные поля разных цветов лежат по разные стороны особого ряда, и между собой не соприкасаются. Разложим на них шашки третьей кучки.

Случай 3). Кучек больше 3. Сольем две самые маленькие кучки в одну. В них вместе не больше шашек, чем в двух самых бoьших, то есть в полученной кучке не более 32 шашек. Если куч больше 3, снова сольем две самые маленькие. Так будем продолжать, пока не останется ровно 3 кучки. Далее раскладываем как в случае 3 куч.

Критерий. 0 баллов за разбор только случая 2 цветов. 4 балла за разбор случая 3 цветов без дальнейших продвижений.