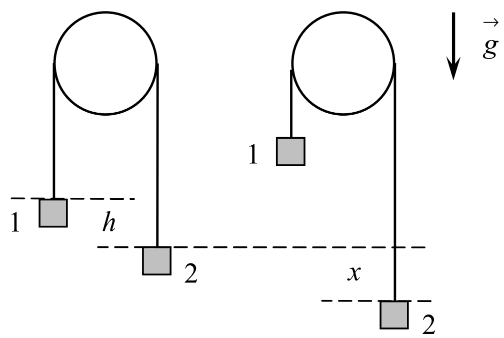
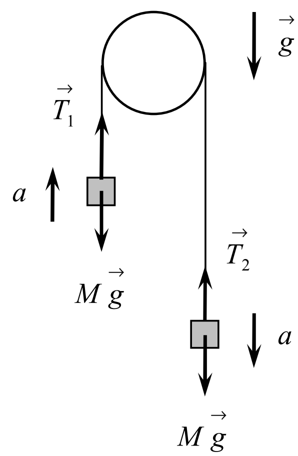
Заключительный этап. 9 класс

Задача 1. Через жёстко закреплённую горизонтальную трубу переброшена нерастяжимая нить массой $m = 10$ г и длиной $L = 2,5$ м. Масса нити равномерно распределена по её длине. К концам нити прикреплены два одинаковых груза 1 и 2 массой $M = 20$ г каждый. В начальном положении груз 2 расположен на высоте $h = 0,1$ м ниже груза 1. Грузы отпускают без начальной скорости. Найдите разность $\Delta T = T_1 - T_2$, где T_1 и T_2 — силы, с которыми нить действует на грузы 1 и 2 в момент, когда груз 2 опустился на высоту $x = 0,2$ м относительно своего начального положения. Числовой ответ выразите в миллиньютонах. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2; трение не учитывайте.



Возможное решение



Так как нить нерастяжима, абсолютная величина ускорений грузов в конечном положении одинакова. Обозначим её через a и запишем второй закон Ньютона в проекции на направление вектора $\vec{g}$:

$$-Ma = -T_1 + Mg \quad \longrightarrow \quad T_1 = Mg + Ma$$

$$Ma = -T_2 + Mg \quad \longrightarrow \quad T_2 = Mg - Ma$$

Разность сил T_1 и T_2 равна:

$$\Delta T = T_1 - T_2 = 2\,Ma$$

Для того чтобы определить ускорение, найдём сначала абсолютную величину V скорости грузов в конечном положении. В силу нерастяжимости нити эта величина одинакова как для грузов, так и для всех точек нити. Запишем закон сохранения энергии:

$$U_1 = \frac{MV^2}{2} \cdot 2 + \frac{mV^2}{2} + U_2 \quad \longrightarrow \quad \frac{(\,2\,M + m\,)\,V^2}{2} = U_1 - U_2$$

Здесь U_1 и U_2 — начальное и конечное значения потенциальной энергии системы в поле тяжести. Убыль потенциальной энергии равна работе силы тяжести A:

$$U_1 - U_2 = A$$

Работу представим в виде суммы трёх слагаемых:

$$A = A_1 + A_2 + A_3\,,$$

где A_1 — работа силы тяжести при перемещении груза 1 на расстояние x вверх, A_2 — работа при перемещении груза 2 на то же расстояние вниз, A_3 — работа при перемещении нити. Для A_1 и A_2 имеем:

$$A_1 = -Mgx\,, \quad A_2 = +Mgx \quad \longrightarrow \quad A_1 + A_2 = 0$$

Работу A_3 можно вычислить, заметив, что конечное положение нити получается из начального перемещением вниз участка нити длины x. Учитывая, что вертикальная составляющая перемещения равна $(x+h)$, получаем:

$$A_3 = m'g\,(x+h)\,,$$

m' — масса рассматриваемого участка:

$$m' = m\cdot\frac{x}{L}$$

Получаем:

$$A = A_3 = \frac{m\,g\,x\,(x+h)}{L}\,,$$

$$\frac{(2M+m)\,V^2}{2} = \frac{m\,g\,x\,(x+h)}{L} \quad \longrightarrow \quad V^2 = \frac{2\,m\,g\,x\,(x+h)}{(2M+m)\,L}$$

Для того чтобы найти ускорение a, представим себе, что за малое время Δt груз 2 переместился вниз на расстояние Δx и его скорость получила приращение ΔV. Тогда:

$$(V+\Delta V)^2 = \frac{2\,m\,g\,(x+\Delta x)\,(x+\Delta x+h)}{(2M+m)\,L}$$

Вычтем два последних равенства друг из друга:

$$(V+\Delta V)^2 - V^2 = \frac{2\,m\,g}{(2M+m)\,L}\,\big((x+\Delta x)(x+\Delta x+h) - x\,(x+h)\big)\,,$$

$$V^2 + 2V\Delta V + (\Delta V)^2 - V^2 = \frac{2\,m\,g}{(2M+m)\,L}\,\left(x\,(x+h) + \Delta x\,(x+h) + x\,\Delta x + (\Delta x)^2 - x\,(x+h)\right)\,,$$

$$2V\Delta V + (\Delta V)^2 = \frac{2\,m\,g}{(2M+m)\,L}\,\left(\Delta x\,(2x+h) + (\Delta x)^2\right)\,,$$

$$2V\Delta V\left(1+\frac{\Delta V}{2V}\right) = \frac{2\,m\,g}{(2M+m)\,L}\cdot\Delta x\,(2x+h)\left(1+\frac{\Delta x}{2x+h}\right)\,,$$

$$V\Delta V\left(1+\frac{\Delta V}{2V}\right) = \frac{m\,g}{(2M+m)\,L}\cdot\Delta x\,(2x+h)\left(1+\frac{\Delta x}{2x+h}\right)\,.$$

Поделим обе части полученного соотношения на Δt:

$$V\,\frac{\Delta V}{\Delta t}\left(1+\frac{\Delta V}{2V}\right) = \frac{m\,g}{(2M+m)\,L}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta t}\cdot(2x+h)\left(1+\frac{\Delta x}{2x+h}\right)$$

При стремлении Δt к нулю имеем:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t}\to a\,, \quad \frac{\Delta x}{\Delta t}\to V\,, \quad \frac{\Delta V}{2V}\to 0\,, \quad \frac{\Delta x}{2x+h}\to 0\,.$$

Получаем:

$$V\cdot a = \frac{m\,g}{(2M+m)\,L}\cdot V\,(2x+h) \quad \longrightarrow \quad a = \frac{m\,g\,(2x+h)}{(2M+m)\,L}$$

Используя этот результат, находим разность сил натяжения нити:

$$\Delta T = 2\,Ma = \frac{2\,mMg\,(2x+h)}{(2M+m)\,L}$$

Подставим числовые значения:

$$\Delta T = \frac{2\cdot 0{,}01\cdot 0{,}02\cdot 10\cdot 0{,}5}{0{,}05\cdot 2{,}5} = \frac{4\cdot 10^{-4}\cdot 5}{5\cdot 10^{-2}\cdot 2{,}5} = \frac{4\cdot 10^{-2}}{2{,}5} = 1{,}6\cdot 10^{-2}\ \text{Н} = 16\ \text{мН}$$

Критерии

1. Записан второй закон Ньютона для грузов (+2 балла).
2. Записан закон сохранения энергии и найдена скорость грузов (+3 балла).
3. Найдено ускорение грузов (+3 балла).
4. Получен правильный буквенный ответ для разности сил натяжения нити (+1 балл).
5. Получен правильный числовой ответ (+1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Другое возможное решение

Т.к. нить нерастяжима, ускорение грузов и нити в любой момент времени равно величине $|\overrightarrow{a}|$. Запишем второй закон Ньютона для грузов 1 и 2 в проекции на ось Y, сонаправленной ускорению свободного падения $\overrightarrow{g}$.

$$-Ma = -T_1 + Mg \quad \longrightarrow \quad T_1 = Mg + Ma$$

$$Ma = -T_2 + Mg \quad \longrightarrow \quad T_2 = Mg - Ma$$

Разность сил T_1 и T_2 равна:

$$\Delta T = T_1 - T_2 = 2\,Ma$$

В данной системе грузов и нити вклад в изменение ускорения $|\overrightarrow{a}|$ вносит только сила тяжести, действующая на две части нити слева и справа от блока, у которых в процессе движения меняется масса в зависимости от координаты y, назовем их $m_1(y)$ и $m_2(y)$ соответственно. Запишем второй закон Ньютона в проекции на OY для частей нити:

$$m_1(y)g + T_3 = -m_1(y)a$$

$$m_2(y)g + T_4 = m_2(y)a$$

Из третьего закона Ньютона

$$|\overrightarrow{T_3}| = |-\overrightarrow{T_1}|, \quad |\overrightarrow{T_4}| = |-\overrightarrow{T_2}|$$

Подставим эти выражения в соответствующие уравнения для частей нити. Запишем комбинацию линейных уравнений для грузов 1 и 2 и частей нити так, чтобы сократились силы натяжения:

$$2Ma + (m_1(y) + m_2(y))a = (m_2(y) - m_1(y))g$$

В любой момент времени

$$m_1(y) + m_2(y) = m$$

вне зависимости от y. А в момент когда груз 2 опустился в на высоту x:

$$m_2(y) - m_1(y) = m\left(\frac{2x + h}{L}\right)$$

Тогда получим:

$$a = m\left(\frac{2x + h}{L}\right)g\frac{1}{2M + m}$$

Получив ускорение a, находим разность сил натяжения нити:

$$\Delta T = 2\,Ma = \frac{2\,mMg\,(\,2\,x + h\,)}{(\,2\,M + m\,)\,L}$$

Подставим числовые значения:

$$\Delta T = \frac{2 \cdot 0,01 \cdot 0,02 \cdot 10 \cdot 0,5}{0,05 \cdot 2,5} = \frac{4 \cdot 10^{-4} \cdot 5}{5 \cdot 10^{-2} \cdot 2,5} = \frac{4 \cdot 10^{-2}}{2,5} = 1,6 \cdot 10^{-2}\ \text{Н} = 16\ \text{мН}$$

Критерии для другого решения

1. Записан второй закон Ньютона для грузов 1 и 2 (+ 2 балла).
2. Записан второй закон Ньютона для частей нити m_1 и m_2 в конечном положении (+ 4 балла).
3. Найдено ускорение системы (+ 2 балла).
4. Получена формула для разности сил натяжения нити (+ 1 балл).
5. Получен правильный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Задача 2. Красная Шапочка опоздала на электричку к бабушке и теперь должна ждать следующую, которая прибудет через полчаса. Чтобы скоротать время, она решила прогуляться: в течение $t_1 = 15$ минут она шла строго на юг с постоянной скоростью, затем повернула на восток и шла еще $t_2 = 8$ минут с этой же скоростью. Вспомнив о времени прибытия электрички, она побежала к станции по кратчайшему пути, причём на каждый шаг, начиная со второго, она тратит на 0.1% времени меньше, чем на предыдущий. Успеет ли Красная Шапочка на электричку, если скорость красной шапочки 1 шаг/с?

Возможное решение

Поскольку Красная Шапочка движется по кратчайшему пути, то весь её маршрут представляет собой прямоугольный треугольник. Тогда по теореме Пифагора:

$$(vt_1)^2 + (vt_2)^2 = (vt_3)^2 \Rightarrow t_1^2 + t_2^2 = t_3^2$$

Получаем $t_3 = \sqrt{t_1^2 + t_2^2} = 17$ минут, тогда Красной Шапочке необходимо сделать $n = 17 \cdot 60 = 1020$ шагов. Поскольку на каждый последующий шаг, начиная со второго, Красная Шапочка тратит на десятую долю процента меньше, можно представить время обратного пути в виде геометрической прогрессии с множителем q:

$$q = 1 - 0.001 = 0.999 : \quad t = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Здесь $b_1 = 1$ с – время, затраченное на первый шаг. Подставляя числа, можно получить ответ: $t \approx 10,6$ мин. Это означает, что Красная Шапочка не успеет на электричку к бабушке.

Критерии

1. Правильно найдено число шагов обратного пути (+ 1 балл).
2. Правильно найдено время обратного пути (+ 8 баллов).
3. Получен правильный ответ (+ 1 балл).

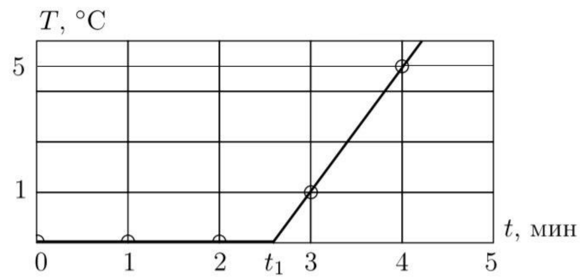
Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Комментарий: присутствует идея представления времени обратного пути в виде геометрической прогрессии — оценка 5 баллов.

Задача 3. Электрокалориметр, наполненный некоторым количеством воды, нагревают с постоянной мощностью N = 75 Вт. В воду, имеющую температуру $0\,°C$, опускают небольшое количество льда и начинают измерять температуру смеси. Через три минуты после помещения льда в калориметр она увеличивается на $\Delta T_1 = 1\,°C$, а к концу четвёртой минуты ещё на $\Delta T_2 = 4\,°C$. Найдите изначальную массу воды в электрокалориметре, а также массу добавленного льда. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 340$ Дж/г, удельная теплоёмкость воды $C = 4{,}2$ Дж/(г $\cdot°\,C$).

Возможное решение

Построим график зависимости температуры воды в калориметре T от времени t:



Из графика можно найти, сколько времени продолжалось таяние льда. Действительно, зависимость температуры воды от времени после того, как весь лёд растаял (переход от горизонтального участка к наклонному), даётся зависимостью

$$T = kt + b$$

Начальных данных достаточно, чтобы установить значения коэффициентов k и b:

$$3k + b = 1, 4k + b = 5 \Rightarrow T = 4t - 11$$

Тогда время таяния льда t_1 можно найти как точку пересечения этой прямой с осью времени: $4t_1 - 11 = 0 \to t_1 = \frac{11}{4}$ мин $= 2.75$ мин $= 165$ с. Из уравнения теплового баланса для таяния льда получаем массу льда:

$$\lambda m = Nt_1 \to m = \frac{Nt_1}{\lambda} \approx 36.4\text{г}.$$

Тогда из уравнения теплового баланса для нагрева воды массой $M + m$, где M – начальная масса воды получим:

$$C(M + m)\Delta T_1 = Nt_2 \quad ,$$

где $t_2 = 15$с – время нагрева жидкости на температуру ΔT_1, следовательно:

$$M = \frac{Nt_2}{C\Delta T_1} - m \approx 231.5 \text{ г}.$$

Критерии

1. Найдено время таяния льда (+ 5 баллов).

2. Найдена масса льда (+ 2 балла).

3. Найдена начальная масса воды (+ 3 балла).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Комментарий: в условии задачи на олимпиаде были возможны опечатки, поэтому решение, в котором была найдена формульно масса льда, принималось как полное решение задачи.

Задача 4. Элементы с внутренними сопротивлениями $r_1 = 5$ Ом и $r_2 = 2$ Ом и с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 3$ В и $\mathcal{E}_2 = 10$ В соединены с внешним сопротивлением R, как показано на рисунке 1. Элементы с $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ заменяют на один элемент с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r, как показано на рисунке 2, при этом падение напряжения на внешнем резисторе не меняется для любого значения сопротивления R. Найдите значения $\mathcal{E}$ и r.

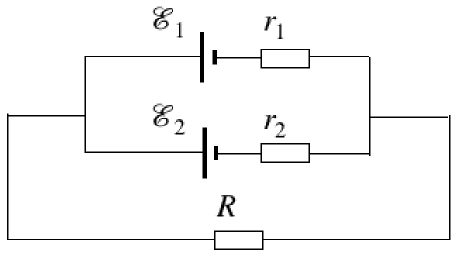


Рис. 1

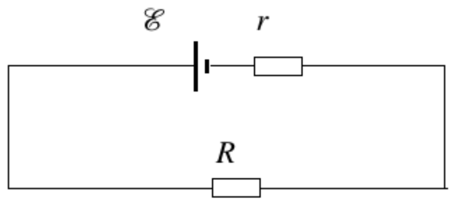


Рис. 2

Возможное решение

Запишем систему уравнений Кирхгофа для контуров, содержащих $\mathcal{E}_{1,2}, r_{1,2}$, обозначив ток через резистор R как I и выбрав направление циркуляции токов, одинаковое для всех таких контуров:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1 = I_1 r_1 + IR \\ \mathcal{E}_2 = I_2 r_2 + IR \\ I = I_1 + I_2 \end{cases}$$

Из этих уравнений можно выразить ток через резистор R:

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - I_1 R}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2 - I_2 R}{r_2}$$

Откуда можно получить выражение для тока I:

$$I = \frac{\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2}}{1 + R(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2})}$$

С другой стороны, ток через резистор R на схеме 2 определяется выражением:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R}$$

Так как падения напряжений на резисторе R должны совпадать для любых значений сопротивления R, можно записать тождество, верное для всех R:

$$\frac{\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2}}{1 + R(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1})} = \frac{\mathcal{E}}{r + R}$$

или

$$R\left(\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} - \mathcal{E}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\right) + r\left(\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2}\right) - \mathcal{E} = 0$$

Так как это тождество верно при всех значениях R, требуется приравнять нулю независимо свободный член и множитель перед R:

$$\begin{cases} \frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} - \mathcal{E}(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}) = 0 \\ r(\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2}) - \mathcal{E} = 0 \end{cases}$$

Из системы выше получаем :

$$\mathcal{E} = \frac{\frac{\mathcal{E}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{r_2}}{(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2})}$$

Это правильный ответ для ЭДС. Из той же системы получаем:

$$r = \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}$$

Это правильный ответ для сопротивления. Подставляя числа из условия в формулы получаем ответ:

$$\mathcal{E} = 8 \text{ В}$$

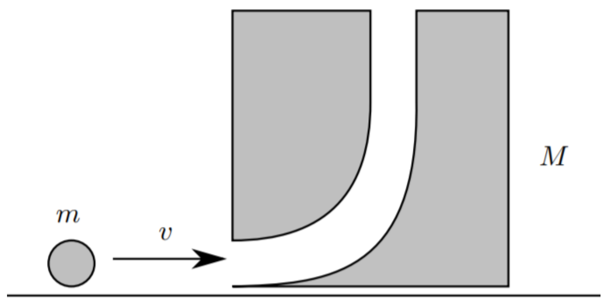
$$r = \frac{10}{7} \text{ Ом}$$

Критерии

1. Правильно записана система уравнений Кирхгофа (+ 3 балла).
2. Получена формула для тока через внешнее сопротивление R (+ 2 балла).
3. Получено тождество, верное для всех R (+ 3 балла).
4. Получен правильный ответ (+ 2 балла).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Задача 5. В кубе массы M просверлено отверстие так, что шар массы m может войти горизонтально, а затем пройти через куб и вылететь вертикально вверх. Шар и куб расположены на поверхности без трения, куб изначально находится в покое. Рассмотрим ситуацию, в котором шар движется горизонтально со скоростью v_0. Шар попадает в куб и выбрасывается из верхней части куба. Предположим, что нет потерь на трение, когда шар проходит через куб, и шар поднимается на высоту, намного превышающую размеры куба. Затем шар возвращается на уровень куба, где он входит в верхнее отверстие, а затем выбрасывается из бокового отверстия. Определите время возврата шарика в положение, в котором происходит первоначальное столкновение, в терминах отношения масс $\beta = \frac{M}{m} > 0$, скорости v_0 и ускорения свободного падения g.



Возможное решение

Шар и куб будут двигаться с одной скоростью все время, пока шар будет находиться внутри куба. В силу закона сохранения импульса горизонтальная скорость куба и шара после столкновения не будет равна нулю (куб поедет) и будет определяться как

$$v_1 = v_0 \frac{m}{M+m}$$

Теперь шар будет иметь вертикальную составляющую скорости v_2. Поскольку нет потерь на трение, мы можем использовать закон сохранения энергии для определения этой скорости. До столкновения кинетическая энергия шара равна $E_0 = \dfrac{mv_0^2}{2}$, после столкновения куб получит энергию

$$E_1 = \frac{Mv_1^2}{2} \Rightarrow E_2 = E_0 - E_1 = \frac{m(v_1^2 + v_2^2)}{2}$$

Найдём отсюда скорость v_2:

$$mv_0^2 - Mv_1^2 = m(v_1^2 + v_2^2) \to v_2 = v_0\sqrt{\frac{M}{M+m}}$$

. Время, проведенное шаром в «воздухе» можно вычислить так: $t_2 = \dfrac{2v_2}{g}$. Тогда расстояние по горизонтали, пройденное шаром в воздухе будет равно

$$x = 2v_0\frac{m}{m+M}v_0\frac{1}{g}\sqrt{\frac{M}{m+M}} = \frac{2v_0^2}{g}\sqrt{\frac{m^2M}{(m+M)^3}}$$

Когда шарик возвращается в полость куба, горизонтальная проекция его скорости будет направлена в обратную сторону, относительно горизонтальной составляющей скорости в момент первого попадания шара в куб (куб, в свою очередь, продолжает движение в том же направлении). Горизонтальная скорость после повторного взаимодействия шара с кубом будет определяться из закона сохранения импульса: $v_3 = v_0\dfrac{m-M}{m+M}$. Тогда время возвращения шара в исходную позицию будет равно

$$t_3 = \frac{x}{|v_3|} = \frac{2v_0}{g}\sqrt{\frac{m^2M}{(m+M)^3}}\frac{M+m}{M-m} = \frac{2v_0}{g}\sqrt{\frac{m^2M}{(m+M)(M-m)^2}}$$

Поскольку шар поднимается гораздо выше, чем высота куба, то временем, проведённым в кубе можно пренебречь по сравнению с временем полета шара. Тогда искомое время будет равно $t_2 + t_3$:

$$\frac{2v_0}{g}\left(\sqrt{\frac{M}{m+M}} + \sqrt{\frac{m^2M}{(m+M)(M-m)^2}}\right) = \frac{2v_0}{g}\sqrt{\frac{M}{m+M}}\left(1 + \sqrt{\frac{m^2}{(M-m)^2}}\right) = \frac{2v_0}{g}\sqrt{\frac{M}{m+M}}\left(\frac{M}{M-m}\right)$$

Вводя отношение масс, получаем итоговый ответ:

$$t = \frac{2v_0}{g}\sqrt{\frac{M}{m+M}}\left(\frac{M}{M-m}\right) = \frac{2v_0}{g}\sqrt{\frac{\beta}{1+\beta}}\left(\frac{\beta}{\beta-1}\right)$$

Критерии

1. Найдена горизонтальная проекция скорости шара в момент первого столкновения с кубом (+ 1 балл).
2. Найдена вертикальная проекция скорости шара после первого вылета из куба (+ 2 балла).
3. Найдено время полета шара «в воздухе» (+ 1 балл).
4. Найдена горизонтальная проекция расстояния, пройденного шаром «в воздухе» (+ 1 балл).
5. Найдена горизонтальная проекция скорости шара после второго взаимодействия шара и куба (+ 3 балла).
6. Найдено время второго взаимодействия шара и куба (+ 1 балл).
7. Получен правильный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.