

## Заключительный этап. 7 класс

**Задача 1.** Масса металлического ведра, до краёв заполненного водой, равна 14 килограммам. В ведро поместили такой шар, что он плавает на поверхности воды, погрузившись в него ровно наполовину. Найдите массу ведра с водой и погруженным в него шаром.

*Возможное решение*

Поскольку в ведро погружена лишь половина шара, то из закона Архимеда следует, что плотность шара вдвое меньше плотности воды:

$$\rho_{\text{шара}} V_{\text{шара}} g = \rho_{\text{воды}} \frac{V_{\text{шара}}}{2} g$$

Тогда при погружении шара вылилась вода массой  $m_1 = \rho_{\text{воды}} \frac{V_{\text{шара}}}{2}$ , и добавился шар массой  $m_2 = \rho_{\text{шара}} V_{\text{шара}}$ . Поскольку

$$\rho_{\text{воды}} = 2\rho_{\text{шара}} \quad ,$$

то

$$m_1 = m_2$$

Значит масса вылившейся воды равна массе погруженного в неё шара.

*Критерии*

1. Верно записан закон Архимеда и получена связь плотностей шара и воды (+ 4 балла).
2. Найдена масса вылившейся воды (+ 3 балла).
3. Найдено, что масса вылившейся воды равна массе шара (+ 3 балла).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

**Задача 2.** Красная Шапочка опоздала на электричку к бабушке и теперь должна ждать следующую, которая придет через полчаса. Чтобы скоротать время, она решила прогуляться: в течение  $t_1 = 15$  минут она шла строго на юг с постоянной скоростью, затем повернула на восток и шла еще  $t_2 = 8$  минут с этой же скоростью. Вспомнив о времени прибытия электрички, она побежала к станции по кратчайшему пути со скоростью в два раза большей, чем шла до этого момента. Успеет ли Красная Шапочка на электричку?

*Возможное решение*

Поскольку Красная Шапочка движется по кратчайшему пути, то весь её маршрут представляет собой прямоугольный треугольник. Тогда по теореме Пифагора:

$$(vt_1)^2 + (vt_2)^2 = (2vt_3)^2 \Rightarrow t_1^2 + t_2^2 = 4t_3^2$$

Тогда:

$$t_3 = \frac{\sqrt{t_1^2 + t_2^2}}{2} = 8,5 \text{ минут}$$

Значит Красная Шапочка гуляла в сумме:

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = 15 + 8 + 8,5 = 31,5 \text{ минут}$$

Следовательно, Красная Шапочка не успеет на электричку.

*Критерии*

1. Записано выражение для любого отрезка пути Красной Шапочки (+ 2 балла).
2. Записана траектория пути Красной Шапочки в виде теоремы Пифагора (+ 4 балла).
3. Получен верный ответ (+ 4 балла).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

*Комментарий: если получен верный ответ «не успеет», но он основан на неверном подсчете времени движения Красной Шапочки, ставился неполный балл.*

**Задача 3.** В рамках химического эксперимента по изучению смешиваемости жидкостей, Михаил смешал 10 литров воды и 20 литров этилового спирта. При смешении оказалось, что суммарный объём уменьшился на 10 процентов. Какова плотность полученного раствора, если плотность воды составляет  $1 \text{ г/см}^3$ , а плотность спирта составляет  $0,8 \text{ г/см}^3$ .

*Возможное решение*

Суммарная масса полученного раствора равна:

$$m = V_1\rho_1 + V_2\rho_2 = 10 * 1 + 20 * 0,8 = 26 \text{ кг} \quad ,$$

где  $V_1$  — объём воды,  $V_2$  — объём этилового спирта,  $\rho_1$  — плотность воды,  $\rho_2$  — плотность этилового спирта. Суммарный объём раствора равен:

$$V = 0,9 * (V_1 + V_2) = 0,9 * (10 + 20) = 27 \text{ литров}$$

Тогда плотность полученного раствора будет равна:

$$\frac{m}{V} = \frac{26}{27} \approx 0,96 \text{ г/см}^3$$

*Критерии*

1. Верно найдена масса полученного (+ 4 балла).
  2. Верно найден объём смеси (+ 4 балла).
  3. Получен верный ответ (+ 2 балла).
- Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

**Задача 4.** Два бегуна стартуют из одной точки круговой трассы в разных направлениях. Скорость первого бегуна равна 15 км/ч, второго — на 1 км/ч больше. Через определённый момент времени они одновременно оказались в точке старта, причём первый бегун на этот момент пробежал на 2 круга меньше второго. Сколько именно кругов пробежал первый бегун?

*Возможное решение*

Пусть до момента встречи в точке старта прошло время  $t$ , и первый спортсмен пробежал ровно  $k$  кругов. Тогда для него верно, что

$$v_1 t = kl \quad ,$$

где  $v_1$  — скорость первого бегуна,  $l$  — длина круговой трассы. Для второго бегуна соответственно:

$$v_2 t = (k + 2)l \quad ,$$

где  $v_2$  — скорость второго бегуна. Вычитая уравнение движения первого бегуна из уравнения второго бегуна, находим, что

$$(v_2 - v_1)t = 2l \Rightarrow t = \frac{2l}{(v_2 - v_1)}$$

Подставляя полученное время  $t$  в выражение пути для первого бегуна, получаем:

$$k = v_1 \frac{2}{(v_2 - v_1)} = 30$$

*Критерии*

1. Получена связь для первого бегуна между проделанным путем и количеством кругов (+ 3 балла).
2. Получена связь для второго бегуна между проделанным путем и количеством кругов (+ 3 балла).
3. Найдено время до момента встречи в точке старта (+ 3 балла).
4. Получен верный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

**Задача 5.** Вова хочет найти плотность сорванной им неспелой груши, но под рукой у него имеются лишь таз с водой и динамометр. Взвесив грушу при помощи динамометра в воздухе, Вова установил растяжение пружины — 1,2 сантиметра. При погружении груши целиком в таз с водой, растяжение пружины динамометра оказалось в 4 раза меньше. Найдите плотность груши. Ускорение свободного падения можно считать равным  $10 \text{ Н/кг}$ , плотность воды  $1 \text{ г/см}^3$ .

*Возможное решение*

Массу груши можно определить после первого взвешивания:

$$kx_1 = mg \Rightarrow m = \frac{kx_1}{g}$$

В воде же на грушу будет действовать также сила Архимеда:

$$kx_2 + \rho Vg = mg = kx_1 \Rightarrow V = \frac{k(x_1 - x_2)}{\rho g}$$

Тогда плотность груши можно найти как:

$$\rho_{\text{груши}} = \frac{m}{V} = \frac{kx_1}{g} * \frac{\rho g}{k(x_1 - x_2)} = \frac{\rho x_1}{x_1 - x_2} = 1,33 \text{ г/см}^3$$

*Критерии*

1. Верно найдена масса груши (+ 3 балла).
2. Верно найден объём груши (+ 4 балла).
3. Получен верная формула для плотности груши (+ 2 балла).
4. Получен верный численный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.