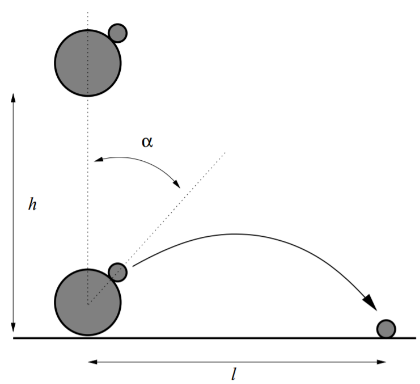
Олимпиада школьников «Курчатов» по физике – 2020

Заключительный этап. 10 класс

Задача 1. Шар для боулинга и мяч для гольфа сбрасывают вместе на плоскую поверхность с высоты h. Мяч для боулинга намного массивнее мяча для гольфа, и радиусы обоих шаров много меньше h. Шар для боулинга сталкивается с поверхностью и сразу после этого с мячом для гольфа: шары сбрасывают так, что все движения перед вторым столкновением являются вертикальными, и мяч для гольфа ударяется о шар для боулинга под углом α от его верхней точки, как показано на рисунке. Все столкновения являются абсолютно упругими, нет трения между шаром для боулинга и мячом для гольфа. После столкновения мяч для гольфа движется при отсутствии сопротивления воздуха и приземляется на расстояние l. Высота $h = 1$ м фиксирована, но α может меняться. Каково максимально возможное значение l и под каким углом α оно достигается?



Возможное решение

Из закона сохранения энергии найдем скорость, с которой оба шара достигают поверхности:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh \rightarrow v_0 = \sqrt{2gh}$$

После того, как шар для боулинга сталкивается с поверхностью, он отскакивает вверх со скоростью v_0, а мяч для гольфа движется вниз со скоростью v_0. Последующее столкновение легче всего понять в системе отсчета, движущейся со скоростью $v_0 cos\alpha$ вдоль оси, получаемой поворотом оси Oy на угол α по часовой стрелке. В дальнейшем система координат, повернутая на угол α по часовой стрелке будет обозначаться как $Ox'y'$. В этой системе мяч для гольфа до соударения с мячом для боулинга имеет компоненты скорости:

$$v_{0x'} = v_0 sin\alpha$$

$$v_{0y'} = -2v_0 cos\alpha$$

Мяч для боулинга имеет нулевую компоненту скорости вдоль оси Oy'. Так как трения между мячами нет, компоненты импульса по оси Ox' не меняются при соударении. Мяч для гольфа испытывает абсолютно упругое соударение с неподвижным массивным объектом относительно движения вдоль оси Oy'. Следовательно, после соударения мяч для гольфа будет иметь следующие компоненты скорости в системе $Ox'y'$:

$$v_{x'} = v_0 sin\alpha$$

$$v_{y'} = 2v_0 cos\alpha$$

Переходя в исходную систему отсчета, получаем, что:

$$v_x = v_{x'} cos\alpha + (v_{y'} + v_0 cos\alpha) sin\alpha$$

$$v_y = v_{x'} sin\alpha + (v_{y'} + v_0 cos\alpha) cos\alpha$$

Отсюда получаем: $v_x = 2v_0 \sin 2\alpha, v_y = 2v_0 \cos 2\alpha + v_0$. В то же время, время полёта t мяча для гольфа находится из: $v_y t - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \rightarrow t = \frac{2v_y}{g}$, значит длина полёта будет равна:

$$l = v_x t = \frac{2v_x v_y}{g} = \frac{2}{g}(2v_0 \sin 2\alpha)(2v_0 \cos 2\alpha + v_0) = \frac{8v_0^2}{g} \sin 2\alpha (\cos 2\alpha + \frac{1}{2}) = 16h \sin 2\alpha (\cos 2\alpha + \frac{1}{2})$$

Пусть $\beta = 2\alpha$, тогда для нахождения максимального расстояния приравняем к нулю производную полученной функции:

$$\frac{dl}{d\beta} = 16h \left[\cos\beta (\cos\beta + \frac{1}{2}) - \sin^2\beta \right] = 0 \Rightarrow \cos^2\beta - \sin^2\beta + \frac{1}{2}\cos\beta = 2\cos^2\beta + \frac{1}{2}\cos\beta - 1 = 0$$

Значит $\cos\beta = \dfrac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+8}}{4}$, и, выбирая положительный корень, получим $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{33}-1}{8} = 0.593$.
Тогда $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = 0.805, \Rightarrow \beta \approx 54^\circ \alpha \approx 27^\circ$
Тогда максимальное расстояние $l = 16h \cdot 0.8 - 5 \cdot (0.593 + 0.5) \approx 14.08h \approx 14.1$ м.

Критерии

1. Верно найдена скорость, с которой мяч для гольфа ударяется о шар для боулинга (+ 1 балл).
2. Записан верный закон сохранения импульса в новой системе координат (+ 1 балл).
3. Правильно найдены компоненты скорости в новой системе координат (+ 1 балл).
4. Правильно найдены компоненты скорости в исходной системе координат (+ 2 балла).
5. Правильно найдена дальность полета в зависимости от угла α и скорости v_0 (+ 2 балла).
6. Получено выражение для угла α (+ 2 балл).
7. Получен правильный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Задача 2. Схема содержит n элементов с ЭДС $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$ и внутренними сопротивлениями $r_1, \ldots, r_n$, как показано на рисунке 1. Элементы с $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$ и $r_1, \ldots, r_n$ заменяют на один элемент с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутреннем сопротивлением r, как показано на рисунке 2, при этом падение напряжения на внешнем резисторе не меняется для любого значения сопротивления R. Найдите зависимость $\mathcal{E}$ и r от $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n$ и $r_1, \ldots, r_n$.

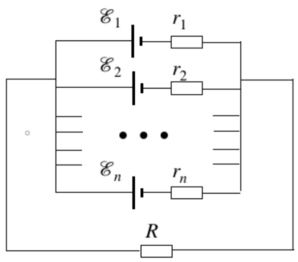


Рис. 1

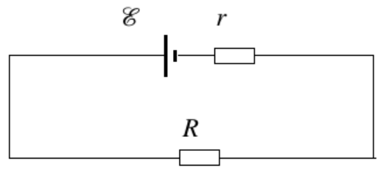


Рис. 2

Возможное решение

Запишем систему уравнений Кирхгофа для контуров, содержащих $\mathcal{E}_i, r_i$, обозначив ток через резистор R как I и выбрав направление циркуляции токов, одинаковое для всех таких контуров:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1 = I_1 r_1 + IR \\ \mathcal{E}_2 = I_2 r_2 + IR \\ \ldots \\ \mathcal{E}_n = I_n r_n + IR \\ I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n \end{cases}$$

Из этих уравнений можно выразить ток через резистор R:

$$I = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{E}_i - I_i R}{r_i}$$

Откуда можно получить выражение для тока I:

$$I = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{E}_i}{r_i}}{1 + R \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}}$$

С другой стороны, ток через резистор R на схеме 2 определяется выражением:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R}$$

Так как падения напряжений на резисторе R должны совпадать для любых значений сопротивления R, можно записать тождество, верное для всех R.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{E}_i}{r_i}}{1 + R \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}} = \frac{\mathcal{E}}{r + R}$$

или

$$R(\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{E}_i}{r_i} - \mathcal{E} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}) + r \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{E}_i}{r_i} - \mathcal{E} = 0$$

Так как это тождество верно при всех значениях R, требуется приравнять нулю независимо свободный член и множитель перед R:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{E}_i}{r_i} - \mathcal{E} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i} = 0 \\ r \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{E}_i}{r_i} - \mathcal{E} = 0 \end{cases}$$

Из системы получаем :

$$\mathcal{E} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{E}_i}{r_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}}$$

Это правильный ответ для ЭДС Из той же системы получаем:

$$r = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}}$$

Критерии

1. Правильно записана система уравнений Кирхгофа (+ 3 балла).
2. Получена формула для тока через внешнее сопротивление R (+ 2 балла).
3. Получено тождество, верное для всех R (+ 3 балла).
4. Получен правильный ответ (+ 2 балла).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Задача 3. Горизонтальный цилиндр разделён пополам теплопроводящим поршнем. В одной половине находится гелий, в другой азот N_2. Отношение k числа молей гелия к числу молей азота равно 3. Сначала поршень закреплён, и газы медленно обмениваются теплом. В момент, когда давления газов (но не их температуры) становятся одинаковыми и равными $P_0 = 0{,}35$ МПа, поршень отпускают. Найдите давление P газов в конечном состоянии механического и теплового равновесия. Стенки цилиндра не проводят тепло, поршень движется без трения.

Возможное решение

Будем отмечать параметры гелия индексом 1, а параметры азота индексом 2. Запишем первое начало термодинамики для газов:

$$Q_1 = \Delta U_1 + A_1\,, \quad Q_2 = \Delta U_2 + A_2$$

Здесь Q_1 и Q_2 — количества теплоты, подведённой к газам, ΔU_1 и ΔU_2 — приращения внутренней энергии газов, A_1 и A_2 — механические работы сил давления газов на поршень. Складывая эти равенства, получаем:

$$Q_1 + Q_2 = \Delta U + A_1 + A_2\,,$$

$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2$ — приращение суммарной внутренней энергии газов. Так как газы обмениваются теплом только друг с другом, то

$$Q_1 = -Q_2 \quad \longrightarrow \quad Q_1 + Q_2 = 0$$

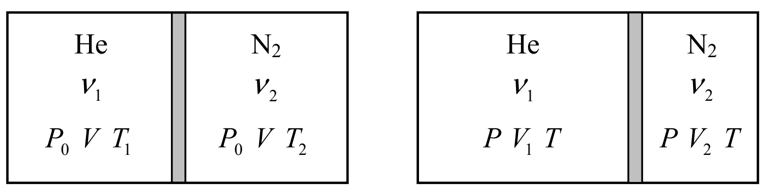
Поскольку механическая энергия поршня не меняется при переходе в конечное состояние, то

$$A_1 + A_2 = 0$$

Получаем:

$$\Delta U = 0 \quad \longrightarrow \quad U = \mathrm{const}\,,$$

то есть суммарная внутренняя энергия газов сохраняется. Этот результат можно получить по-другому, рассматривая баланс энергии для системы, состоящей из газов и поршня. Так как к системе не подводится тепло от внешних источников и система не совершает работу над другими телами, то её внутренняя энергия не меняется. Отсюда, учитывая неизменность механической энергии поршня, приходим к выводу о постоянстве суммарной внутренней энергии газов.



Пусть ν_1 и ν_2 — количества молей гелия и азота, T_1 и T_2 — их начальные температуры, V — начальный объём каждого из газов, P и T — конечные давление и температура, V_1 и V_2 — конечные объёмы. Запишем равенство значений суммарной внутренней энергии газов в начальном и конечном состояниях:

$$\frac{3}{2}\,\nu_1 R T_1 + \frac{5}{2}\,\nu_2 R T_2 = \frac{3}{2}\,\nu_1 R T + \frac{5}{2}\,\nu_2 R T$$

Перейдём от температур к давлениям и объёмам, воспользовавшись уравнением состояния:

$$P_0 V = \nu_1 R T_1\,, \quad P_0 V = \nu_2 R T_2\,, \quad P V_1 = \nu_1 R T\,, \quad P V_2 = \nu_2 R T$$

Получаем:

$$3\,P_0 V + 5\,P_0 V = 3\,P V_1 + 5\,P V_2 \quad \longrightarrow \quad P = \frac{8\,P_0 V}{3\,V_1 + 5\,V_2}$$

Выразим объёмы V_1 и V_2 через V. Из уравнения состояния имеем:

$$P V_1 = \nu_1 R T\,, \quad P V_2 = \nu_2 R T \quad \longrightarrow \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2} = k \quad \longrightarrow \quad V_1 = k\,V_2$$

Учитывая, что $V_1 + V_2 = 2\,V$, получаем:

$$V_1 = \frac{2\,k\,V}{k+1}\,, \quad V_2 = \frac{2\,V}{k+1} \quad \longrightarrow \quad P = \frac{8\,P_0 V\,(\,k+1\,)}{2\,V\,(3\,k+5\,)} = \frac{4\,P_0\,(\,k+1\,)}{3\,k+5}$$

Подставим числовые значения:

$$P = \frac{4 \cdot 0,35 \cdot 4}{14} = \frac{8 \cdot 0,35}{7} = 0,4\ \text{МПа}$$

Критерии

1. Правильно записан закон сохранения энергии через температуры газов (+ 3 балла).
2. Правильно записано уравнение состояния (+ 2 балла).
3. Закон сохранения энергии переписан через давления и объёмы (+ 1 балл).
3. Найдено отношение конечных объёмов (+ 2 балла).
4. Получен правильный буквенный ответ для конечного давления (+ 1 балл).
5. Получен правильный числовой ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Задача 4. Влажный воздух адиабатически поднимается от поверхности моря вверх. Давление у поверхности моря равно $P_1 = 100$ кПа, температура воздуха - 298 К. На высоте, на которой давление становится равным $P_2 = 85$ кПа, начинают образовываться облака и начинает идти дождь.1 кг влажного воздуха теряет $\Delta m = 2{,}5$ г воды в виде дождя по достижению высоты, давление на которой равно $P_3 = 70$ кПа. Удельную теплоту испарения воды принять равной $\lambda = 2500\frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$, считать, что на всем диапазоне высот плотность воздуха меняется линейно. Пренебречь влиянием паров воды на плотность воздуха, воздух считать идеальным двухатомным газом с плотностью $\rho_1 = 1{,}189$ кг/м^3 Найти: 1. Температуру воздуха на высоте, где начинают появляться облака. 2. Найти высоту, на которой начинают появляться облака. 3. Найти температуру на высоте, где давление равно 70 кПа. Примечание: Для адиабатического процесса верно $PV^\gamma = const$, где P - давление, V - объем. γ - показатель адиабаты. Для воздуха можно принять $\gamma = 7/5$, теплоёмкость при постоянном объёме $C_V = 5/2\,R$, где $R = 8{,}31$ Дж/(моль $\cdot$ К) - универсальная газовая постоянная.

Возможное решение

1. Ответ получается путем использования уравнения для идеального газа:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

и уравнения для адиабаты:

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}$$

2. Плотность воздуха на высоте, где давление равно P_2 можно найти из уравнения Клапейрона - Менделеева:

$$\frac{P_1}{\rho_1 T_1} = \frac{P_2}{\rho_2 T_2}$$

Разность давлений $P_1 - P_2$ создается столбом воздуха высоты h. Для простоты рассмотрим цилиндра такой высоты, опирающийся на основание площадью S:

$$\frac{mg}{S} = P_1 - P_2$$

Массу можно найти, зная, что плотность меняется линейно: $m = Sh\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$

$$h = 2\frac{P_1 - P_2}{g(\rho_1 + \rho_2)}$$

3. Так как воздух поднимается адиабатически, но изменением его плотности из-за присутствия водяных паров мы пренебрегаем, можно рассматривать адиабатический процесс движения воздуха и конденсацию воды как два независимых процесса, и посчитать вклад каждого из них для воздуха на высоте, где давление достигает величины P_3:

$$T = T_a + \delta T$$

$$\delta T = \frac{\delta Q}{c_p}$$

Так как процесс выпадения дождя можно считать изобарным, то

$$c_p = 3.5\frac{R}{M} = 1000\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$$

Таким образом:

$$T = T_1\left(\frac{P_3}{P_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} + \frac{\lambda \delta m}{c_p}$$

Критерии

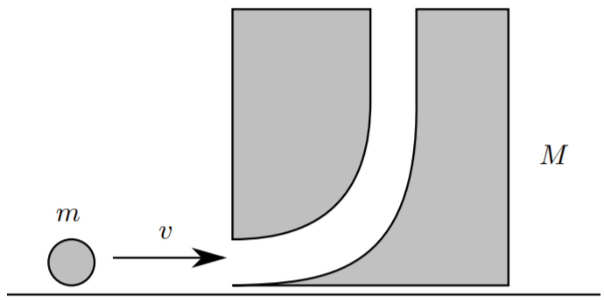
1. Найдена температура воздуха на высоте, где начинают появляться облака (+ 3 балла).

2. Найдена высота, на которой начинают появляться облака (+ 3 балла).

3. Найдена температура воздуха на высоте, где давление равно 70 кПа (+ 4 балла).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.

Задача 5. В кубе массы M просверлено отверстие так, что шар массы m может войти горизонтально, а затем пройти через куб и вылететь вертикально вверх. Шар и куб расположены на поверхности без трения, куб изначально находится в покое. Рассмотрим ситуацию, в котором шар движется горизонтально со скоростью v_0. Шар попадает в куб и выбрасывается из верхней части куба. Предположим, что нет потерь на трение, когда шар проходит через куб, и шар поднимается на высоту, намного превышающую размеры куба. Затем шар возвращается на уровень куба, где он входит в верхнее отверстие, а затем выбрасывается из бокового отверстия. Определите время возврата шарика в положение, в котором происходит первоначальное столкновение, в терминах отношения масс $\beta = \frac{M}{m} > 0$, скорости v_0 и ускорения свободного падения g.



Возможное решение

Шар и куб будут двигаться с одной скоростью все время, пока шар будет находиться внутри куба. В силу закона сохранения импульса горизонтальная скорость куба и шара после столкновения не будет равна нулю (куб поедет) и будет определяться как

$$v_1 = v_0 \frac{m}{M+m}$$

Теперь шар будет иметь вертикальную составляющую скорости v_2. Поскольку нет потерь на трение, мы можем использовать закон сохранения энергии для определения этой скорости. До столкновения кинетическая энергия шара равна $E_0 = \dfrac{mv_0^2}{2}$, после столкновения куб получит энергию

$$E_1 = \frac{Mv_1^2}{2} \Rightarrow E_2 = E_0 - E_1 = \frac{m(v_1^2 + v_2^2)}{2}$$

Найдём отсюда скорость v_2:

$$mv_0^2 - Mv_1^2 = m(v_1^2 + v_2^2) \to v_2 = v_0 \sqrt{\frac{M}{M+m}}$$

. Время, проведенное шаром в «воздухе» можно вычислить так: $t_2 = \dfrac{2v_2}{g}$. Тогда расстояние по горизонтали, пройденное шаром в воздухе будет равно

$$x = 2v_0 \frac{m}{m+M} v_0 \frac{1}{g} \sqrt{\frac{M}{m+M}} = \frac{2v_0^2}{g} \sqrt{\frac{m^2 M}{(m+M)^3}}$$

Когда шарик возвращается в полость куба, горизонтальная проекция его скорости будет направлена в обратную сторону, относительно горизонтальной составляющей скорости в момент первого попадания шара в куб (куб, в свою очередь, продолжает движение в том же направлении). Горизонтальная скорость после повторного взаимодействия шара с кубом будет определяться из закона сохранения импульса: $v_3 = v_0 \dfrac{m-M}{m+M}$. Тогда время возвращения шара в исходную позицию будет равно

$$t_3 = \frac{x}{|v_3|} = \frac{2v_0}{g} \sqrt{\frac{m^2 M}{(m+M)^3}} \frac{M+m}{M-m} = \frac{2v_0}{g} \sqrt{\frac{m^2 M}{(m+M)(M-m)^2}}$$

Поскольку шар поднимается гораздо выше, чем высота куба, то временем, проведённым в кубе можно пренебречь по сравнению с временем полета шара. Тогда искомое время будет равно $t_2 + t_3$:

$$\frac{2v_0}{g} \left(\sqrt{\frac{M}{m+M}} + \sqrt{\frac{m^2 M}{(m+M)(M-m)^2}} \right) = \frac{2v_0}{g} \sqrt{\frac{M}{m+M}} \left(1 + \sqrt{\frac{m^2}{(M-m)^2}} \right) = \frac{2v_0}{g} \sqrt{\frac{M}{m+M}} \left(\frac{M}{M-m} \right)$$

Вводя отношение масс, получаем итоговый ответ:

$$t = \frac{2v_0}{g} \sqrt{\frac{M}{m+M}} \left(\frac{M}{M-m} \right) = \frac{2v_0}{g} \sqrt{\frac{\beta}{1+\beta}} \left(\frac{\beta}{\beta - 1} \right)$$

Критерии

1. Найдена горизонтальная проекция скорости шара в момент первого столкновения с кубом (+ 1 балл).
2. Найдена вертикальная проекция скорости шара после первого вылета из куба (+ 2 балла).
3. Найдено время полета шара «в воздухе» (+ 1 балл).
4. Найдена горизонтальная проекция расстояния, пройденного шаром «в воздухе» (+ 1 балл).
5. Найдена горизонтальная проекция скорости шара после второго взаимодействия шара и куба (+ 3 балла).
6. Найдено время второго взаимодействия шара и куба (+ 1 балл).
7. Получен правильный ответ (+ 1 балл).

Максимальная оценка за задачу — 10 баллов.