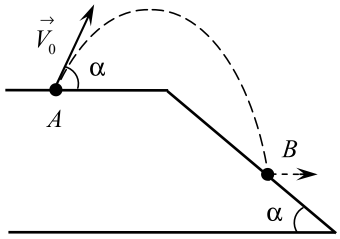
10.1/1. Мяч бросают из точки A под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. В точке B, лежащей на нисходящем участке траектории, мяч падает на плоскость, наклонённую к горизонту под тем же углом α. В результате абсолютно упругого удара мяч отскакивает от плоскости в горизонтальном направлении. Найдите начальную скорость мяча V_0. Точка B лежит на высоте $h = 3{,}1$ м ниже точки A; ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Ответ выразите в м/с и округлите до десятых.



Возможное решение

Пусть $\vec{V}$ — скорость мяча перед ударом о наклонную плоскость. При абсолютно упругом ударе мяч отражается от плоскости зеркально. Учитывая, что скорость мяча сразу после удара направлена горизонтально, из простых геометрических соображений получаем, что вектор $\vec{V}$ образует с горизонтом угол $\beta = 2\alpha = 60^\circ$. Обозначим через t время движения мяча из точки A в точку B. Тогда

$$\vec{V} = \vec{V_0} + \vec{g}\,t$$

Угол между векторами $\vec{V}$ и $\vec{V_0}$ равен $\alpha + \beta = 3\alpha = 90^\circ$. Таким образом, векторы $\vec{V}$, $\vec{V_0}$ и $\vec{g}\,t$ образуют прямоугольный треугольник с углом α, лежащим против стороны $\vec{V_0}$. Отсюда находим связь V и V_0:

$$V = V_0 \operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}\,V_0$$

Далее воспользуемся законом сохранения энергии. Обозначив массу мяча через m, имеем:

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{mV_0^2}{2} + mgh \quad \longrightarrow \quad V^2 = V_0^2 + 2gh$$

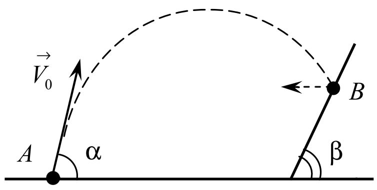
Подставляя сюда $V = \sqrt{3}\,V_0$, находим начальную скорость мяча:

$$3V_0^2 = V_0^2 + 2gh \quad \longrightarrow \quad V_0 = \sqrt{gh} = 5{,}6 \text{ м/с}$$

Ответ:

$$V_0 = \sqrt{gh} = 5{,}6 \text{ м/с}$$

10.1/2. Мяч бросают из точки A под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. В точке B, лежащей на нисходящем участке траектории, мяч падает на плоскость, наклонённую к горизонту под углом $\beta = (\alpha + 90^\circ)/2$. В результате абсолютно упругого удара мяч отскакивает от плоскости в горизонтальном направлении. Найдите начальную скорость мяча V_0. Точка B лежит на высоте $h = 1{,}9$ м над точкой A; ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Ответ выразите в м/с и округлите до десятых.



Возможное решение

Пусть $\vec{V}$ — скорость мяча перед ударом о наклонную плоскость. При абсолютно упругом ударе мяч отражается от плоскости зеркально. Учитывая, что скорость мяча сразу после удара направлена горизонтально, из простых геометрических соображений получаем, что вектор $\vec{V}$ образует с горизонтом угол $\gamma = 180^\circ - 2\beta = 90^\circ - \alpha = 30^\circ$. Обозначим через t время движения мяча из точки A в точку B. Тогда

$$\vec{V} = \vec{V_0} + \vec{g}t$$

Угол между векторами $\vec{V}$ и $\vec{V_0}$ равен $\alpha + \gamma = 90^\circ$. Таким образом, векторы $\vec{V}$, $\vec{V_0}$ и $\vec{g}t$ образуют прямоугольный треугольник с углом α, лежащим против стороны $\vec{V_0}$. Отсюда находим связь V и V_0:

$$V = V_0 \operatorname{ctg}\alpha = \frac{V_0}{\sqrt{3}}$$

Далее воспользуемся законом сохранения энергии. Обозначив массу мяча через m, имеем:

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{mV^2}{2} + mgh \quad \longrightarrow \quad V_0^2 = V^2 + 2gh$$

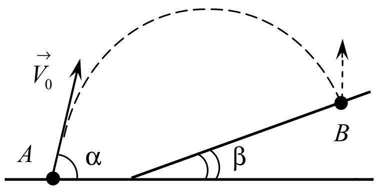
Подставляя сюда $V = V_0/\sqrt{3}$, находим начальную скорость мяча:

$$V_0^2 = \frac{V_0^2}{3} + 2gh \quad \longrightarrow \quad V_0 = \sqrt{3gh} = 7{,}6 \text{ м/с}$$

Ответ:

$$V_0 = \sqrt{3gh} = 7{,}6 \text{ м/с}$$

10.1/3. Мяч бросают из точки A под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту со скоростью $V_0 = 12$ м/с. В точке B, лежащей на нисходящем участке траектории, мяч падает на плоскость, наклонённую к горизонту под углом $\beta = \alpha/2$. В результате абсолютно упругого удара мяч отскакивает от плоскости вертикально вверх. Найдите высоту h точки B над точкой A. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Ответ выразите в метрах.



Возможное решение

Пусть $\overrightarrow{V}$ — скорость мяча перед ударом о наклонную плоскость. При абсолютно упругом ударе мяч отражается от плоскости зеркально. Учитывая, что скорость мяча сразу после удара направлена вертикально вверх, из простых геометрических соображений получаем, что вектор $\overrightarrow{V}$ образует с горизонтом угол $\gamma = 90^\circ - 2\beta = 90^\circ - \alpha$. Обозначим через t время движения мяча из точки A в точку B. Тогда

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V_0} + \overrightarrow{g}t$$

Угол между векторами $\overrightarrow{V}$ и $\overrightarrow{V_0}$ равен $\alpha + \gamma = 90^\circ$. Таким образом, векторы $\overrightarrow{V}$, $\overrightarrow{V_0}$ и $\overrightarrow{g}t$ образуют прямоугольный треугольник с углом α, лежащим против стороны $\overrightarrow{V_0}$. Отсюда находим связь V и V_0:

$$V = V_0 \operatorname{ctg}\alpha = V_0 \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{V_0}{\sqrt{3}}$$

Далее воспользуемся законом сохранения энергии. Обозначив массу мяча через m, имеем:

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{mV^2}{2} + mgh \quad \longrightarrow \quad V_0^2 = V^2 + 2gh$$

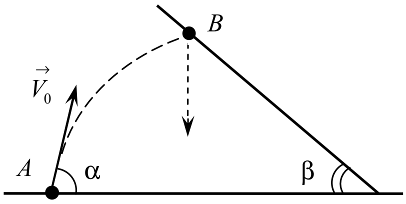
Подставляя сюда $V = V_0/\sqrt{3}$, находим высоту h:

$$V_0^2 = \frac{V_0^2}{3} + 2gh \quad \longrightarrow \quad h = \frac{V_0^2}{3\,g} = 4{,}8 \text{ м}$$

Ответ:

$$h = \frac{V_0^2}{3\,g} = 4{,}8 \text{ м}$$

10.1/4. Мяч бросают из точки A под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту со скоростью $V_0 = 13{,}1$ м/с. В точке B, лежащей на восходящем участке траектории, мяч сталкивается с плоскостью, наклонённой к горизонту под углом $\beta = 30^\circ$. В результате абсолютно упругого удара мяч отскакивает от плоскости вертикально вниз. Найдите высоту h точки B над точкой A. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Ответ выразите в метрах.



Возможное решение

Пусть $\vec{V}$ — скорость мяча перед ударом о наклонную плоскость. При абсолютно упругом ударе мяч отражается от плоскости зеркально. Учитывая, что скорость мяча сразу после удара направлена вертикально вниз, из простых геометрических соображений получаем, что вектор $\vec{V}$ образует с горизонтом угол $90^\circ - 2\beta = 30^\circ$. Обозначим через t время движения мяча из точки A в точку B. Тогда

$$\vec{V} = \vec{V_0} + \vec{g}\,t$$

Входящие сюда векторы образуют равнобедренный треугольник — углы, прилегающие к стороне V_0, равны 30°. Отсюда находим связь V и V_0:

$$V_0 = 2\,V\cos 30^\circ = \sqrt{3}\,V \quad \longrightarrow \quad V = \frac{V_0}{\sqrt{3}}$$

Далее воспользуемся законом сохранения энергии. Обозначив массу мяча через m, имеем:

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{mV^2}{2} + mgh \quad \longrightarrow \quad V_0^2 = V^2 + 2gh$$

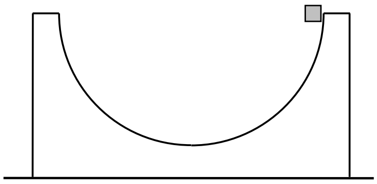
Подставляя сюда $V = V_0/\sqrt{3}$, находим высоту h:

$$V_0^2 = \frac{V_0^2}{3} + 2gh \quad \longrightarrow \quad h = \frac{V_0^2}{3\,g} = 5{,}7 \text{ м}$$

Ответ:

$$h = \frac{V_0^2}{3\,g} = 5{,}7 \text{ м}$$

10.2/1. С края полусферы массой $M = 2{,}5$ кг, стоящей на шероховатом горизонтальном столе, начинает соскальзывать маленький брусок массой $m = 40$ г. Найдите минимальное значение коэффициента трения μ между полусферой и столом, при котором полусфера будет оставаться неподвижной при движении бруска. Трение между бруском и полусферой не учитывайте; для упрощения считайте силу нормальной реакции, действующую на полусферу со стороны стола, постоянной и равной Mg. Ответ запишите в виде десятичной дроби.



Возможное решение

Рассмотрим движение бруска по неподвижной полусфере. Пусть брусок прошёл по поверхности полусферы дугу, которой соответствует центральный угол α. Второй закон Ньютона, записанный в проекции на направление центростремительного ускорения, даёт:

$$\frac{mV^2}{R} = N_1 - mg\sin\alpha$$

V — скорость бруска, R — радиус полусферы, N_1 — сила нормальной реакции, действующая на брусок со стороны полусферы. Скорость бруска найдём из закона сохранения энергии. Принимая потенциальную энергию за нуль в начальном положении бруска, получаем:

$$0 = \frac{mV^2}{2} - mgR\sin\alpha \quad \longrightarrow \quad V^2 = 2gR\sin\alpha$$

Сила N_1 равна:

$$N_1 = mg\sin\alpha + \frac{mV^2}{R} = mg\sin\alpha + m\,\frac{2gR\sin\alpha}{R} = 3\,mg\sin\alpha$$

По третьему закону Ньютона сила N_1 равна силе давления бруска на полусферу. Горизонтальная составляющая силы давления компенсируется силой трения покоя F, действующей на полусферу со стороны стола:

$$F = N_1\cos\alpha = 3\,mg\sin\alpha\cos\alpha = \frac{3\,mg\sin 2\alpha}{2}$$

Вертикальная составляющая силы давления и сила тяжести Mg определяют силу нормальной реакции N_2, действующую на полусферу со стороны стола:

$$N_2 = Mg + N_1\sin\alpha = Mg + 3\,mg\sin^2\alpha$$

В силу неравенства $M \gg m$ вторым слагаемым можно пренебречь. В этом приближении

$$N_2 = Mg$$

Сила трения покоя удовлетворяет неравенству:

$$F \le \mu N_2$$

Отсюда получаем:

$$\frac{3\,mg\sin 2\alpha}{2} \le \mu Mg \quad \longrightarrow \quad \mu \ge \frac{3\,m\sin 2\alpha}{2\,M}$$

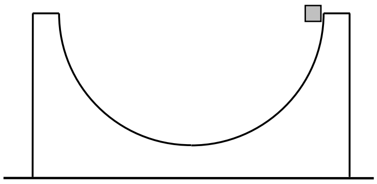
Для того чтобы это неравенство выполнялось при любом значении угла α, достаточно потребовать, чтобы оно выполнялось при $\sin 2\alpha = 1$. Тогда минимальное значение коэффициента трения, при котором полусфера будет оставаться неподвижной, равно:

$$\mu = \frac{3\,m}{2\,M} = 0{,}024$$

Ответ:

$$\mu = \frac{3\,m}{2\,M} = 0{,}024$$

10.2/2. С края полусферы массой $M = 1{,}8$ кг, стоящей на шероховатом горизонтальном столе, начинает соскальзывать маленький брусок массой $m = 30$ г. Найдите минимальное значение коэффициента трения μ между полусферой и столом, при котором полусфера будет оставаться неподвижной при движении бруска. Трение между бруском и полусферой не учитывайте; для упрощения считайте силу нормальной реакции, действующую на полусферу со стороны стола, постоянной и равной Mg. Ответ запишите в виде десятичной дроби.



Возможное решение

Рассмотрим движение бруска по неподвижной полусфере. Пусть брусок прошёл по поверхности полусферы дугу, которой соответствует центральный угол α. Второй закон Ньютона, записанный в проекции на направление центростремительного ускорения, даёт:

$$\frac{mV^2}{R} = N_1 - mg\sin\alpha$$

V — скорость бруска, R — радиус полусферы, N_1 — сила нормальной реакции, действующая на брусок со стороны полусферы. Скорость бруска найдём из закона сохранения энергии. Принимая потенциальную энергию за нуль в начальном положении бруска, получаем:

$$0 = \frac{mV^2}{2} - mgR\sin\alpha \quad \longrightarrow \quad V^2 = 2gR\sin\alpha$$

Сила N_1 равна:

$$N_1 = mg\sin\alpha + \frac{mV^2}{R} = mg\sin\alpha + m\,\frac{2gR\sin\alpha}{R} = 3\,mg\sin\alpha$$

По третьему закону Ньютона сила N_1 равна силе давления бруска на полусферу. Горизонтальная составляющая силы давления компенсируется силой трения покоя F, действующей на полусферу со стороны стола:

$$F = N_1\cos\alpha = 3\,mg\sin\alpha\cos\alpha = \frac{3\,mg\sin 2\alpha}{2}$$

Вертикальная составляющая силы давления и сила тяжести Mg определяют силу нормальной реакции N_2, действующую на полусферу со стороны стола:

$$N_2 = Mg + N_1\sin\alpha = Mg + 3\,mg\sin^2\alpha$$

В силу неравенства $M \gg m$ вторым слагаемым можно пренебречь. В этом приближении

$$N_2 = Mg$$

Сила трения покоя удовлетворяет неравенству:

$$F \le \mu N_2$$

Отсюда получаем:

$$\frac{3\,mg\sin 2\alpha}{2} \le \mu Mg \quad \longrightarrow \quad \mu \ge \frac{3\,m\sin 2\alpha}{2\,M}$$

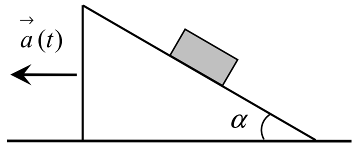
Для того чтобы это неравенство выполнялось при любом значении угла α, достаточно потребовать, чтобы оно выполнялось при $\sin 2\alpha = 1$. Тогда минимальное значение коэффициента трения, при котором полусфера будет оставаться неподвижной, равно:

$$\mu = \frac{3\,m}{2\,M} = 0{,}025$$

Ответ:

$$\mu = \frac{3\,m}{2\,M} = 0{,}025$$

10.3/1. На клине, стоящем на горизонтальном столе, лежит брусок. Угол наклона клина $\alpha = \operatorname{arctg}(0{,}4)$, коэффициент трения между клином и бруском $\mu = 0{,}5$. Клин начинает двигаться с горизонтальным ускорением, зависящим от времени t по закону $a(t) = a_0 \cdot (t/t_0)$, где $a_0 = 1$ м/с^2 и $t_0 = 7{,}2$ с. Найдите, через какое время T брусок начнёт скользить по клину. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Ответ выразите в секундах.



Возможное решение

Рассмотрим движение бруска вместе с клином до начала скольжения. На брусок действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции $\vec{N}$ и сила трения покоя $\vec{F}$. Вектор $\vec{F}$ направлен вверх вдоль поверхности клина. Запишем второй закон Ньютона для бруска:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}$$

Проецируя это равенство на направления векторов $\vec{F}$ и $\vec{N}$, получаем:

$$ma\cos\alpha = F - mg\sin\alpha \quad \longrightarrow \quad F = m(g\sin\alpha + a\cos\alpha)$$

$$-ma\sin\alpha = N - mg\cos\alpha \quad \longrightarrow \quad N = m(g\cos\alpha - a\sin\alpha)$$

Брусок начинает скользить по клину, когда сила трения покоя F достигает своего максимального значения, равного силе трения скольжения μN:

$$F = \mu N \quad \longrightarrow \quad m(g\sin\alpha + a\cos\alpha) = \mu m(g\cos\alpha - a\sin\alpha) \quad \longrightarrow \quad a = \frac{g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$$

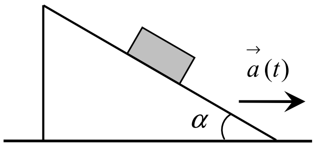
Подставляя сюда $a = a_0(T/t_0)$, находим время T:

$$T = t_0 \cdot \frac{g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}{a_0(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)} = t_0 \cdot \frac{g}{a_0} \cdot \frac{\mu - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \mu\operatorname{tg}\alpha} = 6 \text{ с}$$

Ответ:

$$T = t_0 \cdot \frac{g}{a_0} \cdot \frac{\mu - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \mu\operatorname{tg}\alpha} = 6 \text{ с}$$

10.3/2. На клине, стоящем на горизонтальном столе, лежит брусок. Угол наклона клина $\alpha = \operatorname{arctg}(0{,}2)$. Клин начинает двигаться с горизонтальным ускорением, зависящим от времени t по закону $a(t) = a_0 \cdot (t/t_0)$, где $a_0 = 1$ м/с^2 и $t_0 = 0{,}8$ с. Спустя время $T = 4$ с брусок начинает скользить вверх по клину. Найдите коэффициент трения μ между клином и бруском. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Ответ округлите до сотых.



Возможное решение

Рассмотрим движение бруска вместе с клином до начала скольжения. На брусок действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции $\vec{N}$ и сила трения покоя $\vec{F}$. Запишем второй закон Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}$$

Направим ось x вдоль поверхности клина вниз, ось y — вдоль вектора $\vec{N}$. В проекциях на эти оси получаем:

$$ma\cos\alpha = mg\sin\alpha + F_x \quad \longrightarrow \quad F_x = m(a\cos\alpha - g\sin\alpha)$$

$$ma\sin\alpha = N - mg\cos\alpha \quad \longrightarrow \quad N = m(a\sin\alpha + g\cos\alpha)$$

Здесь F_x — проекция силы $\vec{F}$ на ось x. Брусок не будет скользить по клину до тех пор, пока выполняется неравенство:

$$|F_x| \le \mu N$$

В левой части стоит абсолютная величина силы трения покоя, в правой — сила трения скольжения. Из полученных выше выражений для сил следует, что при разгоне клина правая часть неравенства монотонно возрастает как функция времени. Что касается величины F_x, то она обращается в нуль в момент времени τ, который определяется условием:

$$a\cos\alpha = g\sin\alpha \quad \longrightarrow \quad a_0(\tau/t_0) = g\operatorname{tg}\alpha \quad \longrightarrow \quad \tau = t_0\frac{g}{a_0}\operatorname{tg}\alpha = 1{,}6 \text{ с}$$

Таким образом, при $0 \le t < \tau$ проекция F_x отрицательна, то есть сила трения направлена вдоль поверхности клина вверх (как в случае неподвижного клина). При этом модуль F_x как функция времени убывает от значения $mg\sin\alpha$ при $t = 0$ до нуля при $t = \tau$ и приведённое выше неравенство выполняется. При $t > \tau$ проекция F_x положительна и сила трения направлена вдоль поверхности клина вниз. Как функция времени F_x монотонно возрастает. Брусок начинает скользить по клину вверх (против направления силы трения) в момент времени T, когда сила трения покоя становится равной силе трения скольжения:

$$F_x = \mu N \quad \longrightarrow \quad m(a\cos\alpha - g\sin\alpha) = \mu m(a\sin\alpha + g\cos\alpha) \quad \longrightarrow \quad \mu = \frac{a\cos\alpha - g\sin\alpha}{a\sin\alpha + g\cos\alpha}$$

Подставляя сюда $a = a_0(T/t_0)$ и вводя безразмерное отношение

$$Z = \frac{a}{g} = \frac{T}{t_0}\cdot\frac{a_0}{g}$$

получаем:

$$\mu = \frac{Z - \operatorname{tg}\alpha}{1 + Z\operatorname{tg}\alpha}$$

Подстановка числовых значений даёт:

$$Z = 0.5$$

$$\mu = 0.27$$

Ответ:

$$\mu = \frac{Z - \operatorname{tg}\alpha}{1 + Z\operatorname{tg}\alpha} = 0.27\,, \quad Z = \frac{T}{t_0}\cdot\frac{a_0}{g} = 0.5$$

10.4/1. Два одинаковых сосуда соединены короткой трубкой с краном. Сначала кран закрыт, в одном сосуде имеется $\nu_1 = 0{,}2$ моля гелия при давлении $P_1 = 0{,}7$ МПа, в другом – $\nu_2 = 0{,}3$ моля молекулярного азота N_2 при давлении $P_2 = 0{,}1$ МПа. Кран открывают, и газы начинают перемешиваться. В конечном состоянии оба сосуда заполнены однородной газовой смесью, находящейся в механическом и тепловом равновесии. Найдите давление P этой смеси. Ответ выразите в мегапаскалях и округлите до сотых. Стенки сосудов, трубка и кран не проводят тепло. Объём трубки не учитывайте.

Возможное решение

Пусть T_1 и T_2 — начальные температуры гелия и азота, T — конечная температура газовой смеси. Рассмотрим баланс энергии для системы, состоящей из двух газов. Так как тепло к системе не подводится и газы не совершают механическую работу, то внутренняя энергия системы сохраняется:

$$\frac{3}{2}\,\nu_1 RT_1 + \frac{5}{2}\,\nu_2 RT_2 = \frac{3}{2}\,\nu_1 RT + \frac{5}{2}\,\nu_2 RT \quad \longrightarrow \quad 3\,\nu_1 RT_1 + 5\,\nu_2 RT_2 = (\,3\,\nu_1 + 5\,\nu_2\,)\,RT$$

Обозначим через V объём одного сосуда и запишем уравнение Клапейрона–Менделеева для газов в начальном состоянии и для конечной газовой смеси:

$$P_1 V = \nu_1 RT_1\,; \quad P_2 V = \nu_2 RT_2$$

$$P \cdot 2V = (\,\nu_1 + \nu_2\,)\,RT \quad \longrightarrow \quad RT = \frac{2\,PV}{\nu_1 + \nu_2}$$

Подставляя эти результаты в уравнение баланса энергии, находим конечное давление газовой смеси:

$$3\,P_1 V + 5\,P_2 V = \frac{(\,3\,\nu_1 + 5\,\nu_2\,)\,2\,PV}{\nu_1 + \nu_2} \quad \longrightarrow \quad P = \frac{(\,3\,P_1 + 5\,P_2\,)\,(\,\nu_1 + \nu_2\,)}{2\,(\,3\,\nu_1 + 5\,\nu_2\,)} = 0{,}31 \text{ МПа}\,.$$

Ответ:

$$P = \frac{(\,3\,P_1 + 5\,P_2\,)\,(\,\nu_1 + \nu_2\,)}{2\,(\,3\,\nu_1 + 5\,\nu_2\,)} = 0{,}31 \text{ МПа}\,.$$

10.4/2. Два одинаковых сосуда соединены короткой трубкой с краном. Сначала кран закрыт, в одном сосуде имеется гелий при давлении $P_1 = 0{,}4$ МПа, в другом — молекулярный азот N_2 при давлении $P_2 = 0{,}3$ МПа. Кран открывают, и газы начинают перемешиваться. В конечном состоянии оба сосуда заполнены однородной газовой смесью, находящейся в механическом и тепловом равновесии. Давление смеси $P = 0{,}3$ МПа. Найдите отношение x числа молей азота к числу молей гелия. Стенки сосудов, трубка и кран не проводят тепло. Объём трубки не учитывайте.

Возможное решение

Пусть T_1 и T_2 — начальные температуры гелия и азота, T — конечная температура газовой смеси, ν_1 и ν_2 — количества молей гелия и азота. Рассмотрим баланс энергии для системы, состоящей из двух газов. Так как тепло к системе не подводится и газы не совершают механическую работу, то внутренняя энергия системы сохраняется:

$$\frac{3}{2}\nu_1 RT_1 + \frac{5}{2}\nu_2 RT_2 = \frac{3}{2}\nu_1 RT + \frac{5}{2}\nu_2 RT \quad \longrightarrow \quad 3\,\nu_1 RT_1 + 5\,\nu_2 RT_2 = (\,3\,\nu_1 + 5\,\nu_2\,)\,RT$$

Обозначим через V объём одного сосуда и запишем уравнение Клапейрона–Менделеева для газов в начальном состоянии и для конечной газовой смеси:

$$P_1 V = \nu_1 RT_1\,; \quad P_2 V = \nu_2 RT_2$$

$$P\cdot 2V = (\,\nu_1 + \nu_2\,)\,RT \quad \longrightarrow \quad RT = \frac{2\,PV}{\nu_1 + \nu_2}$$

Подставляя эти результаты в уравнение баланса энергии, получаем:

$$3\,P_1 V + 5\,P_2 V = \frac{(\,3\,\nu_1 + 5\,\nu_2\,)\,2\,PV}{\nu_1 + \nu_2} \quad \longrightarrow \quad (\,3\,P_1 + 5\,P_2\,)\,(\,\nu_1 + \nu_2\,) = 2\,P\,(\,3\,\nu_1 + 5\,\nu_2\,)$$

Введём отношение числа молей азота к числу молей гелия:

$$x = \frac{\nu_2}{\nu_1}$$

Выражая отсюда ν_2, получаем:

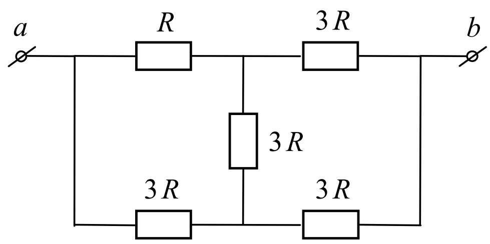
$$(\,3\,P_1 + 5\,P_2\,)\,(\,\nu_1 + x\,\nu_1\,) = 2\,P\,(\,3\,\nu_1 + 5\,x\,\nu_1\,) \quad \longrightarrow \quad (\,3\,P_1 + 5\,P_2\,)\,(\,1 + x\,) = 2\,P\,(\,3 + 5\,x\,)$$

$$3\,P_1 + 5\,P_2 + x\,(\,3\,P_1 + 5\,P_2\,) = 6\,P + 10\,P\,x \quad \longrightarrow \quad x = \frac{3\,P_1 + 5\,P_2 - 6\,P}{10\,P - 3\,P_1 - 5\,P_2} = 3$$

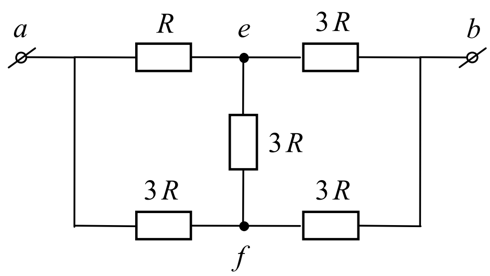
Ответ:

$$x = \frac{3\,P_1 + 5\,P_2 - 6\,P}{10\,P - 3\,P_1 - 5\,P_2} = 3$$

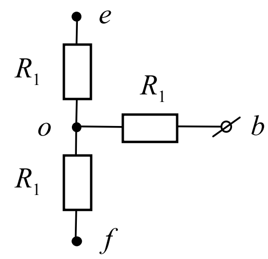
10.5/1. Система, состоящая из одного сопротивления R и четырёх сопротивлений $3\,R$, подключёна к источнику постоянного напряжения за клеммы a и b. Найдите отношение $x = (R_0 - 2\,R)/\,R$, где R_0 – общее сопротивление системы. Ответ округлите до сотых.



Возможное решение



Воспользуемся преобразованием треугольник–звезда. В рассматриваемой схеме имеются треугольники aef и bef. Это замкнутые контуры, которые присоединяются к остальной цепи за три узла, причём между любыми двумя узлами включено одно сопротивление. Удобнее работать с треугольником bef, поскольку он состоит из трёх одинаковых сопротивлений. Преобразуем этот треугольник в звезду. Очевидно, что все три сопротивления, входящие в состав звезды, оди-

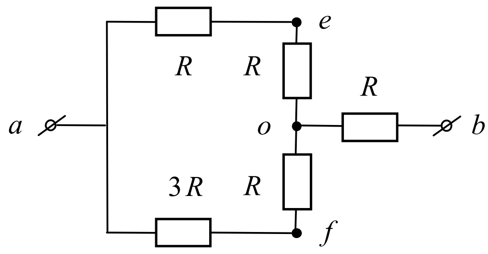


наковы. Для того чтобы найти их величину R_1, представим себе, что треугольник подключён к источнику за точки b и e. В этом случае имеем два последовательно соединённых сопротивления в ветвях bf и fe. К ним параллельно присоединено сопротивление в ветви be. Общее сопротивление треугольника в этом случае равно $2\,R$. Если подключить к источнику звезду за те же точки, то будем иметь два последовательно соединённых сопротивления в ветвях bo и oe (ток через сопротивление в ветви of равен нулю). Общее сопротивление звезды равно $2\,R_1$. Приравнивая сопротивления треугольника и звезды, находим R_1:

$$2\,R = 2\,R_1 \quad \longrightarrow \quad R_1 = R$$

Заменяя в исходной схеме треугольник bef звездой, приходим к эквивалентной схеме, сопротивление которой легко найти, пользуясь стандартными правилами сложения сопротивлений при параллельном и последовательном соединениях. Для общего сопротивления всей системы получаем:

$$R_0 = \frac{7R}{3}$$



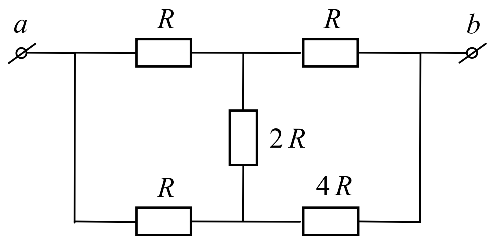
Искомое отношение x равно:

$$x = \frac{R_0 - 2\,R}{R} = \frac{1}{3} = 0{,}33$$

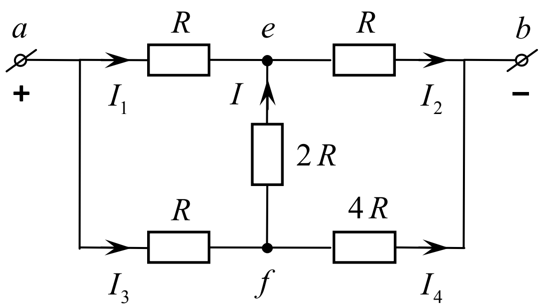
Ответ:

$$x = 0{,}33$$

10.5/2. Система, состоящая из трёх сопротивлений $R = 100$ Ом, одного сопротивления $2\,R$ и одного сопротивления $4\,R$, подключёна к источнику постоянного напряжения $V = 22$ В за клеммы a и b. Найдите силу тока I, текущего через сопротивление $2\,R$. Ответ выразите в миллиамперах.



Возможное решение



Пусть положительный полюс батареи подключен к клемме a, а отрицательный к клемме b. Расставим токи в ветвях схемы и запишем закон сохранения заряда в узлах e и f:

$$I_2 = I_1 + I\,; \quad I_3 = I_4 + I$$

Приравнивая нулю алгебраическую сумму напряжений в замкнутом контуре $aefa$, получаем:

$$R\,I_1 - 2\,R\,I - R\,I_3 = 0 \quad \longrightarrow \quad I_1 - 2\,I - I_3 = 0$$

Кроме того, сумма напряжений на двух верхних и двух нижних сопротивлениях равна V. Имеем ещё два уравнения:

$$R\,I_1 + R\,I_2 = V \quad \longrightarrow \quad I_1 + I_2 = \frac{V}{R}$$

$$R\,I_3 + 4\,R\,I_4 = V \quad \longrightarrow \quad I_3 + 4\,I_4 = \frac{V}{R}$$

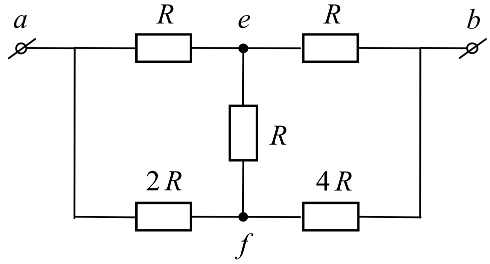
Получилась система пяти линейных уравнений для пяти неизвестных токов. Последовательно исключая неизвестные, находим ток I:

$$I = \frac{V}{11\,R} = 20 \text{ мА}$$

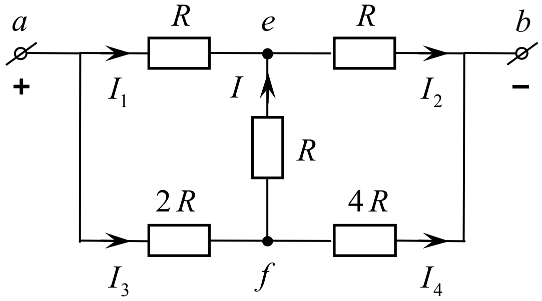
Ответ:

$$I = \frac{V}{11\,R} = 20 \text{ мА}$$

10.5/3. Система, состоящая из трёх сопротивлений R, одного сопротивления $2\,R$ и одного сопротивления $4\,R$, подключёна к источнику постоянного напряжения $V_0 = 51$ В за клеммы a и b. Найдите напряжение V на участке ef. Ответ выразите в вольтах.



Возможное решение



Пусть положительный полюс батареи подключен к клемме a, а отрицательный к клемме b. Расставим токи в ветвях схемы и запишем закон сохранения заряда в узлах e и f:

$$I_2 = I_1 + I\,; \quad I_3 = I_4 + I$$

Переходя от токов к напряжениям на сопротивлениях, имеем:

$$\frac{V_2}{R} = \frac{V_1}{R} + \frac{V}{R} \quad \longrightarrow \quad V_2 = V_! + V$$

$$\frac{V_3}{2\,R} = \frac{V_4}{4\,R} + \frac{V}{R} \quad \longrightarrow \quad 2\,V_3 = V_4 + 4\,V$$

Приравнивая нулю алгебраическую сумму напряжений в замкнутых контурах $aefa$ и $befb$, получаем:

$$V_1 - V - V_3 = 0\,; \quad V_2 - V_4 + V = 0$$

Кроме того, сумма напряжений на двух верхних сопротивлениях равна V_0:

$$V_1 + V_2 = V_0$$

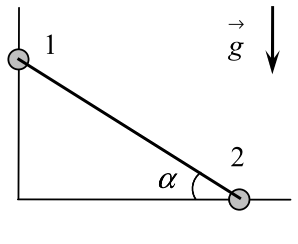
Получилась система пяти линейных уравнений для пяти неизвестных напряжений. Последовательно исключая неизвестные, находим напряжение V:

$$V = \frac{V_0}{17} = 3 \text{ В}$$

Ответ:

$$V = \frac{V_0}{17} = 3 \text{ В}$$

10.6/1. Из тонкой проволоки согнут прямой угол, неподвижно закрепленый так, что одна из его сторон вертикальна. По сторонам угла могут скользить без трения маленькие бусинки 1 и 2 одинаковой массы. Бусинки соединены жёстким невесомым стерженем длины $L = 0{,}75$ м. При движении стержень может свободно поворачиваться вокруг точек крепления к бусинкам. В начальном положении бусинки неподвижны, стержень наклонён к горизонту под углом $\alpha = 30°$. Стержень с бусинками отпускают без толчка. Найдите максимальную скорость V, до которой разгонится бусинка 2 при движении бусинки 1 вниз. Бусинки считайте материальными точками. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2 . Ответ выразите в м/с и округлите до сотых.



Возможное решение

Рассмотрим промежуточное положение системы, когда стержень наклонён к горизонту под углом φ . Скорости бусинок в этом положении обозначим через V_1 и V_2 . Отсчитывая высоты от вершины угла, запишем закон сохранения энергии:

$$mgL\sin\alpha = \frac{mV_1^2}{2} + \frac{mV_2^2}{2} + mgL\sin\varphi \quad \longrightarrow \quad V_1^2 + V_2^2 = 2gL\,(\,\sin\alpha - \sin\varphi\,)$$

Здесь m — масса бусинок. Так как длина стержня не меняется при движении, то проекции скоростей на направление стержня совпадают:

$$V_1\sin\varphi = V_2\cos\varphi$$

Исключая скорость V_1 , находим V_2 как функцию угла φ :

$$V_1 = V_2\operatorname{ctg}\varphi \quad \longrightarrow \quad V_2^2\,(\,\operatorname{ctg}^2\varphi + 1\,) = 2gL\,(\,\sin\alpha - \sin\varphi\,) \quad \longrightarrow \quad V_2^2 = 2gL\sin^2\varphi\,(\,\sin\alpha - \sin\varphi\,)$$

Угол φ меняется на отрезке $[\,0, \alpha\,]$. На концах отрезка скорость V_2 обращается в нуль. Найдём экстремумы V_2 . Приравнивая нулю первую производную по φ, получаем:

$$2\sin\varphi\,\cos\varphi\,\sin\alpha - 3\sin^2\varphi\,\cos\varphi = 0 \quad \longrightarrow \quad \sin\varphi\,\cos\varphi\,(\,2\sin\alpha - 3\sin\varphi\,) = 0$$

Максимуму соответствует корень

$$\sin\varphi = \frac{2\sin\alpha}{3}$$

Максимальная скорость второй бусинки равна:

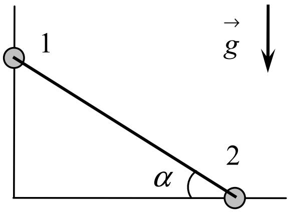
$$V^2 = 2gL\left(\frac{2\sin\alpha}{3}\right)^2\left(\sin\alpha - \frac{2\sin\alpha}{3}\right) = gL\left(\frac{2\sin\alpha}{3}\right)^3$$

$$V = \sqrt{gL}\,\left(\frac{2\sin\alpha}{3}\right)^{3/2} = 0{,}53 \text{ м/с}$$

Ответ:

$$V = \sqrt{gL}\,\left(\frac{2\sin\alpha}{3}\right)^{3/2} = 0{,}53 \text{ м/с}$$

10.6/2. Из тонкой проволоки согнут прямой угол, неподвижно закрепленый так, что одна из его сторон вертикальна. По сторонам угла могут скользить без трения маленькие бусинки 1 и 2 одинаковой массы. Бусинки соединены жёстким невесомым стержнем длины $L = 0{,}75$ м. При движении стержень может свободно поворачиваться вокруг точек крепления к бусинкам. В начальном положении бусинки неподвижны, стержень наклонён к горизонту под углом $\alpha = 25°$. Стержень с бусинками отпускают без толчка. Найдите максимальную скорость V, до которой разгонится бусинка 2 при движении бусинки 1 вниз. Бусинки считайте материальными точками. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2 . Ответ выразите в м/с и округлите до сотых.



Возможное решение

Рассмотрим промежуточное положение системы, когда стержень наклонён к горизонту под углом φ . Скорости бусинок в этом положении обозначим через V_1 и V_2 . Отсчитывая высоты от вершины угла, запишем закон сохранения энергии:

$$mgL\sin\alpha = \frac{mV_1^2}{2} + \frac{mV_2^2}{2} + mgL\sin\varphi \quad\longrightarrow\quad V_1^2 + V_2^2 = 2gL\,(\,\sin\alpha - \sin\varphi\,)$$

Здесь m — масса бусинок. Так как длина стержня не меняется при движении, то проекции скоростей на направление стержня совпадают:

$$V_1\sin\varphi = V_2\cos\varphi$$

Исключая скорость V_1 , находим V_2 как функцию угла φ :

$$V_1 = V_2\operatorname{ctg}\varphi \quad\longrightarrow\quad V_2^2\,(\,\operatorname{ctg}^2\varphi + 1\,) = 2gL\,(\,\sin\alpha - \sin\varphi\,) \quad\longrightarrow\quad V_2^2 = 2gL\sin^2\varphi\,(\,\sin\alpha - \sin\varphi\,)$$

Угол φ меняется на отрезке $[\,0, \alpha\,]$. На концах отрезка скорость V_2 обращается в нуль. Найдём экстремумы V_2 . Приравнивая нулю первую производную по φ, получаем:

$$2\sin\varphi\,\cos\varphi\,\sin\alpha - 3\sin^2\varphi\,\cos\varphi = 0 \quad\longrightarrow\quad \sin\varphi\,\cos\varphi\,(\,2\sin\alpha - 3\sin\varphi\,) = 0$$

Максимуму соответствует корень

$$\sin\varphi = \frac{2\sin\alpha}{3}$$

Максимальная скорость второй бусинки равна:

$$V^2 = 2gL\left(\frac{2\sin\alpha}{3}\right)^2\left(\sin\alpha - \frac{2\sin\alpha}{3}\right) = gL\left(\frac{2\sin\alpha}{3}\right)^3$$

$$V = \sqrt{gL}\,\left(\frac{2\sin\alpha}{3}\right)^{3/2} = 0{,}41 \text{ м/с}$$

Ответ:

$$V = \sqrt{gL}\,\left(\frac{2\sin\alpha}{3}\right)^{3/2} = 0{,}41 \text{ м/с}$$