Курчатов 2018, физика, отборочный этап

11 класс

Гидростатика

Задача 1.1 Куб со стороной $a = 10$ см плавает в ртути, погрузившись на $1/4$ своего объёма. Поверх ртути постепенно доливают воду до тех пор, пока над водой не останется $1/4$ объёма куба. Найдите толщину h слоя воды. Плотность ртути $\rho_{\text{р}} = 13{,}6$ г/см^3 , плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1$ г/см^3 . Ответ выразите в сантиметрах и округлите до десятых.

Возможное решение.

Запишем условие плавания куба в ртути, приравняв силу тяжести выталкивающей силе:

$$mg = \rho_{\text{р}}\, g\, (a^3/4) \quad \longrightarrow \quad m = \rho_{\text{р}}\, (a^3/4)\,,$$

m — масса куба, a^3 — его объём, g — ускорение свободного падения. Запишем теперь условие плавания для случая, когда поверх ртути налита вода:

$$mg = \rho_{\text{в}}\, g\, a^2\, h + \rho_{\text{р}}\, g\, a^2\, (3a/4 - h) \quad \longrightarrow \quad m = \rho_{\text{в}}\, a^2\, h + \rho_{\text{р}}\, a^2\, (3a/4 - h)\,.$$

Здесь $(3a/4-h)$ — толщина слоя ртути, в котором находится нижняя часть куба. Исключая из полученных соотношений массу куба, находим h:

$$\rho_{\text{р}}\, (a^3/4) = \rho_{\text{в}}\, a^2\, h + \rho_{\text{р}}\, a^2\, (3a/4 - h) \quad \longrightarrow \quad \rho_{\text{р}}\, a = 4\rho_{\text{в}}\, h + \rho_{\text{р}}\, (3a - 4h)\,,$$

$$4\,(\rho_{\text{р}} - \rho_{\text{в}})\, h = 2\rho_{\text{р}}\, a \quad \longrightarrow \quad h = \frac{\rho_{\text{р}}\, a}{2\,(\rho_{\text{р}} - \rho_{\text{в}})}\,.$$

Подставим числовые значения в системе СГС:

$$h = \frac{13,6 \cdot 10}{2 \cdot (13,6 - 1)} = 5,4 \text{ см}$$

Ответ:

$$h = \frac{a\,\rho_{\text{р}}}{2\,(\rho_{\text{р}} - \rho_{\text{в}})} = 5{,}4 \text{ см}$$

Задача 1.2 Шар плавает в ртути, погрузившись на $1/5$ своего объёма. Поверх ртути постепенно доливают воду до тех пор, пока над водой не останется $1/5$ объёма шара. Найдите, какая часть x объёма шара останется погруженной в ртуть. Плотность ртути $\rho_{\text{р}} = 13{,}6$ г/см^3 , плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1$ г/см^3 . Ответ округлите до сотых.

Возможное решение.

Запишем условие плавания шара в ртути, приравняв силу тяжести выталкивающей силе:

$$mg = \rho_{\text{р}}\, g\, (V/5) \quad \longrightarrow \quad m = \rho_{\text{р}}\, (V/5)\,,$$

m — масса шара, V — его объём, g — ускорение свободного падения. В случае, когда поверх ртути налита вода, объёмы частей шара, находящихся в ртути и в воде равны соответственно xV и $(4V/5 - xV)$. Условие плавания выглядит так:

$$mg = \rho_{\text{р}}\, g\, xV + \rho_{\text{в}}\, g\, (4V/5 - xV) \quad \longrightarrow \quad m = \rho_{\text{р}}\, xV + \rho_{\text{в}}\, (4/5 - x)V\,,$$

Исключая из полученных соотношений массу шара, находим x:

$$\rho_{\text{р}}(V/5) = \rho_{\text{р}} xV + \rho_{\text{в}}(4/5 - x)V \quad \longrightarrow \quad \rho_{\text{р}} = 5\rho_{\text{р}} x + \rho_{\text{в}}(4 - 5x)\,,$$

$$\rho_{\text{р}} - 4\rho_{\text{в}} = 5x(\rho_{\text{р}} - \rho_{\text{в}}) \quad \longrightarrow \quad x = \frac{\rho_{\text{р}} - 4\rho_{\text{в}}}{5(\rho_{\text{р}} - \rho_{\text{в}})}\,.$$

Подставим числовые значения в системе СГС:

$$x = \frac{13,6 - 4}{5 \cdot (13,6 - 1)} = 0,15$$

Ответ:

$$x = \frac{\rho_{\text{р}} - 4\,\rho_{\text{в}}}{5\,(\rho_{\text{р}} - \rho_{\text{в}})} = 0{,}15$$

Задача 1.3 В воде плавает цилиндрическая шайба, вдоль оси которой просверлено сквозное отверстие. Поверх воды в отверстие постепенно добавляют масло до тех пор, пока его уровень не станет вровень с верхним основанием шайбы. Масло и вода не перемешиваются, масло не вытекает в воду. Найдите толщину h слоя масла. Толщина шайбы $H = 6$ см, плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1$ г/см^3, плотность масла $\rho_{\text{м}} = 0{,}8$ г/см^3, плотность материала шайбы $\rho_{\text{ш}} = 0{,}85$ г/см^3. Ответ выразите в сантиметрах и округлите до десятых.

Возможное решение.

Запишем условие плавания шайбы:

$$mg = S\Delta P\,,$$

m — масса шайбы, S — площадь её поперечного сечения (без учёта площади отверстия), ΔP — разность давлений на нижнем и верхнем основаниях шайбы, g — ускорение свободного падения. Масса шайбы равна:

$$m = \rho_{\text{ш}} SH\,.$$

Разность давлений найдём, рассматривая столб воды и масла в отверстии:

$$\Delta P = \rho_{\text{м}}\, g\, h + \rho_{\text{в}}\, g\,(H - h)\,.$$

Получаем:

$$\rho_{\text{ш}} SHg = S\,(\,\rho_{\text{м}}\, g\, h + \rho_{\text{в}}\, g\,(H - h)\,) \quad \longrightarrow \quad \rho_{\text{ш}} H = \rho_{\text{м}}\, h + \rho_{\text{в}}\,(H - h)\,,$$

$$h\,(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{м}}) = H\,(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{ш}}) \quad \longrightarrow \quad h = \frac{H\,(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{ш}})}{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{м}}}$$

Подставим числовые значения в системе СГС:

$$h = \frac{6 \cdot (1 - 0,85)}{1 - 0,8} = 4,5 \text{ см}$$

Ответ:

$$h = \frac{H\,(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{ш}})}{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{м}}} = 4{,}5 \text{ см}$$

Законы Ньютона

Задача 2.1 Брусок массой $m = 0{,}3$ кг стоит на доске массой $M = 4{,}7$ кг, лежащей на гладкой горизонтальной поверхности. Коэффициент трения между бруском и доской $\mu = 0{,}1$. На доску начинает действовать горизонтальная сила F, зависящая от времени t по закону: $F = F_0\,(t/t_0)$; $F_0 = 10$ Н, $t_0 = 5$ с. Найдите, через какое время T брусок начнёт скользить по доске. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Ответ выразите в секундах и округлите до десятых.

Возможное решение.

Рассмотрим случай, когда брусок не скользит по доске. В этом случае брусок и доска движутся как одно тело массой $m+M$ с ускорением a. По второму закону Ньютона имеем:

$$(m+M)\,a = F \quad \longrightarrow \quad a = \frac{F}{m+M}\,.$$

На брусок со стороны доски действует сила трения покоя $F_{\text{т}}$, сообщающая ему ускорение a. Записав второй закон Ньютона для бруска, получаем:

$$F_{\text{т}} = ma = \frac{mF}{m+M} = \frac{mF_0}{m+M}\cdot\frac{t}{t_0}$$

Брусок начнёт скользить по доске в момент времени T, когда сила $F_{\text{т}}$ станет равна силе трения скольжения:

$$F_{\text{т}} = \mu\, mg \quad \longrightarrow \quad \frac{mF_0}{m+M}\cdot\frac{T}{t_0} = \mu\, mg \quad \longrightarrow \quad T = \frac{\mu\,(m+M)\,g}{F_0}\,t_0\,.$$

Подставим числовые значения:

$$T = \frac{0,1\cdot(0,3+4,7)\cdot 10}{10}\cdot 5 = 2,5\ \text{с}$$

Ответ:

$$T = \frac{\mu\,(m+M)\,g}{F_0}\,t_0 = 2{,}5\ \text{с}$$

Задача 2.2 Брусок массой $m = 0{,}5$ кг стоит на доске массой $M = 3{,}5$ кг, лежащей на гладкой горизонтальной поверхности. На брусок начинает действовать горизонтальная сила F, зависящая от времени t по закону: $F = F_0\,(t/t_0)$; $F_0 = 8$ Н, $t_0 = 7$ с. Спустя время $T = 1$ с брусок начинает скользить по доске. Найдите коэффициент трения μ между бруском и доской. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Возможное решение.

Рассмотрим случай, когда брусок не скользит по доске. В этом случае брусок и доска движутся как одно тело массой $m+M$ с ускорением a. По второму закону Ньютона имеем:

$$(m+M)\,a = F \quad \longrightarrow \quad a = \frac{F}{m+M}\,.$$

На доску со стороны бруска действует сила трения покоя $F_{\text{т}}$, сообщающая ей ускорение a. Записав второй закон Ньютона для доски, получаем:

$$F_{\text{т}} = Ma = \frac{MF}{m+M} = \frac{MF_0}{m+M} \cdot \frac{t}{t_0}$$

Брусок начнёт скользить по доске в момент времени T, когда сила $F_{\text{т}}$ станет равна силе трения скольжения:

$$F_{\text{т}} = \mu mg \quad \longrightarrow \quad \frac{MF_0}{m+M} \cdot \frac{T}{t_0} = \mu mg \quad \longrightarrow \quad \mu = \frac{F_0}{(m+M)\,g} \cdot \frac{M}{m} \cdot \frac{T}{t_0}$$

Подставим числовые значения:

$$\mu = \frac{8}{(0,5+3,5)\cdot 10} \cdot \frac{3,5}{0,5} \cdot \frac{1}{7} = 0,2$$

Ответ:

$$\mu = \frac{F_0}{(m+M)\,g} \cdot \frac{M}{m} \cdot \frac{T}{t_0} = 0{,}2$$

Задача 2.3 Брусок массой $m = 0{,}2$ кг стоит на доске массой $M = 2{,}8$ кг, лежащей на гладкой горизонтальной поверхности. На доску начинает действовать горизонтальная сила F, зависящая от времени t по закону: $F = F_0 \sin(2\pi t/T)$; $F_0 = 18$ Н, T — период изменения силы. Спустя время $\tau = T/12$ брусок начинает скользить по доске. Найдите коэффициент трения μ между бруском и доской. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Возможное решение.

Рассмотрим случай, когда брусок не скользит по доске. В этом случае брусок и доска движутся как одно тело массой $m+M$ с ускорением a. По второму закону Ньютона имеем:

$$(m+M)\,a = F \quad \longrightarrow \quad a = \frac{F}{m+M}\,.$$

На брусок со стороны доски действует сила трения покоя $F_{\text{т}}$, сообщающая ему ускорение a. Записав второй закон Ньютона для бруска, получаем:

$$F_{\text{т}} = ma = \frac{mF}{m+M} = \frac{mF_0 \sin(2\pi t/T)}{m+M}\,.$$

Брусок начнёт скользить по доске в момент времени τ, когда сила $F_{\text{т}}$ станет равна силе трения скольжения:

$$F_{\text{т}} = \mu mg \quad \longrightarrow \quad \frac{mF_0 \sin(2\pi\tau/T)}{m+M} = \mu mg \quad \longrightarrow \quad \mu = \frac{F_0 \sin(2\pi\tau/T)}{(m+M)\,g}\,.$$

Подставим числовые значения:

$$\mu = \frac{18 \cdot \sin(\pi/6)}{(0,2+2,8)\cdot 10} = 0,3$$

Ответ:

$$\mu = \frac{F_0 \sin(2\pi\tau/T)}{(m+M)\,g} = 0{,}3$$

Задача 2.4 Брусок массой $m = 1$ кг стоит на доске массой $M = 5$ кг, лежащей на гладкой горизонтальной поверхности. Коэффициент трения между бруском и доской $\mu = 0{,}15$. На брусок начинает действовать горизонтальная сила F, зависящая от времени t по закону: $F = F_0 \sin\omega t$; F_0 и ω — амплитуда и частота изменения силы. Найдите максимальное значение амплитуды F_0, при котором брусок не будет скользить по доске. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Ответ выразите в ньютонах и округлите до десятых.

Возможное решение.

Рассмотрим случай, когда брусок не скользит по доске. В этом случае брусок и доска движутся как одно тело массой $m+M$ с ускорением a. По второму закону Ньютона имеем:

$$(m+M)\,a = F \quad \longrightarrow \quad a = \frac{F}{m+M}\,.$$

На доску со стороны бруска действует сила трения покоя $F_{\text{т}}$, сообщающая ей ускорение a. Записав второй закон Ньютона для доски, получаем:

$$F_{\text{т}} = Ma = \frac{MF}{m+M} = \frac{MF_0\,\sin\omega t}{m+M}\,.$$

Брусок не будет скользить по доске, если абсолютная величина силы $F_{\text{т}}$ не превосходит силу трения скольжения:

$$|F_{\text{т}}| \le \mu\, mg \quad \longrightarrow \quad \frac{MF_0\,|\sin\omega t|}{m+M} \le \mu\, mg\,.$$

Это неравенство должно выполняться в любой момент времени. Для этого достаточно потребовать, чтобы оно выполнялось при $|\sin\omega t| = 1$:

$$\frac{MF_0}{m+M} \le \mu\, mg\,.$$

Максимальная амплитуда силы соответствует знаку равенства:

$$\frac{MF_0}{m+M} = \mu\, mg \quad \longrightarrow \quad F_0 = \mu\, mg \cdot \frac{m+M}{M}$$

Подставим числовые значения:

$$F_0 = 0,15 \cdot 1 \cdot 10 \cdot \frac{1+5}{5} = 1,8 \text{ Н}$$

Ответ:

$$F_0 = \mu mg \cdot \frac{m+M}{M} = 1{,}8 \text{ Н}$$

Законы сохранения импульса и энергии

Задача 3.1 Шайба 1 движется по льду и сталкивается с первоначально покоящейся шайбой 2. После абсолютно упругого удара шайбы разлетаются с одинаковыми по абсолютной величине скоростями. Угол между направлениями этих скоростей $\vartheta = 110^\circ$. Найдите отношение x масс шайб: $x = m_2/m_1$. Трение и вращение шайб не учитывайте. Ответ округлите до десятых.

Возможное решение.

Пусть $\overrightarrow{p}$ и $\overrightarrow{p_1}$ — начальный и конечный импульсы шайбы 1, $\overrightarrow{p_2}$ – конечный импульс шайбы 2. Так как конечные скорости шайб одинаковы, то

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{m_2}{m_1} = x \quad \longrightarrow \quad p_2 = x\,p_1\,.$$

Из закона сохранения энергии имеем:

$$\frac{p^2}{2m_1} = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} \;\longrightarrow\; x\,p^2 = x\,p_1^2 + p_2^2 \;\longrightarrow\; x\,p^2 = x\,p_1^2 + x^2\,p_1^2 \;\longrightarrow\; p^2 = p_1^2\,(1+x)\,.$$

Запишем закон сохранения импульса:

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}\,.$$

Нарисовав треугольник из входящих сюда векторов и используя теорему косинусов, получаем:

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1\,p_2\cos(\pi - \vartheta) \quad \longrightarrow \quad p_1^2\,(1+x) = p_1^2 + x^2\,p_1^2 + 2p_1^2\,x\cos\vartheta\,,$$

$$1 + x = 1 + x^2 + 2x\cos\vartheta \quad \longrightarrow \quad 1 = x + 2\cos\vartheta \quad \longrightarrow \quad x = 1 - 2\cos\vartheta = 1,7$$

Ответ:

$$x = 1 - 2\cos\vartheta = 1{,}7$$

Задача 3.2 Шайба 1 движется по льду и сталкивается с первоначально покоящейся шайбой 2. После абсолютно упругого удара шайбы разлетаются с одинаковыми кинетическими энергиями. Найдите угол ϑ между направлениями конечных скоростей шайб. Известно отношение k масс шайб: $k = m_2/m_1 = 3$. Трение и вращение шайб не учитывайте. Ответ выразите в градусах и округлите до целого.

Возможное решение.

Пусть $\overrightarrow{p}$ и $\overrightarrow{p_1}$ — начальный и конечный импульсы шайбы 1, $\overrightarrow{p_2}$ – конечный импульс шайбы 2. Так как конечные кинетические энергии шайб одинаковы, то

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_2^2}{2m_2} \quad \longrightarrow \quad k\,p_1^2 = p_2^2 \quad \longrightarrow \quad p_2 = \sqrt{k}\,p_1\,.$$

Из закона сохранения энергии имеем:

$$\frac{p^2}{2m_1} = 2 \cdot \frac{p_1^2}{2m_1} \quad \longrightarrow \quad p^2 = 2p_1^2 \quad \longrightarrow \quad p = \sqrt{2}\,p_1\,.$$

Запишем закон сохранения импульса:

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}\,.$$

Нарисовав треугольник из входящих сюда векторов и используя теорему косинусов, получаем:

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1\,p_2\cos(\pi - \vartheta) \quad\longrightarrow\quad 2p_1^2 = p_1^2 + k\,p_1^2 + 2p_1^2\sqrt{k}\,\cos\vartheta\,,$$

$$2 = 1 + k + 2\sqrt{k}\,\cos\vartheta \;\longrightarrow\; \cos\vartheta = \frac{1-k}{2\sqrt{k}} \;\longrightarrow\; \vartheta = \arccos\frac{1-k}{2\sqrt{k}} = \arccos(-1/\sqrt{3}\,) = 125^\circ$$

Ответ:

$$\vartheta = \arccos\frac{1-k}{2\sqrt{k}} = \arccos(-1/\sqrt{3}\,) = 125^\circ$$

Задача 3.3 Шайба 1 движется по льду и сталкивается с первоначально покоящейся шайбой 2. После абсолютно упругого удара шайбы разлетаются с одинаковыми по абсолютной величине импульсами. Найдите угол ϑ между направлениями этих импульсов. Известно отношение k масс шайб: $k = m_1/m_2 = 2{,}6$. Трение и вращение шайб не учитывайте. Ответ выразите в градусах и округлите до целого.

Возможное решение.

Запишем закон сохранения импульса:

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}\,,$$

$\overrightarrow{p}$ и $\overrightarrow{p_1}$ — начальный и конечный импульсы шайбы 1, $\overrightarrow{p_2}$ – конечный импульс шайбы 2. Нарисовав равнобедренный треугольник из входящих сюда векторов ($p_1 = p_2$, углы при основании p по $\vartheta/2$), получаем:

$$p = 2p_1\cos\frac{\vartheta}{2}\,.$$

Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{p^2}{2m_1} = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_1^2}{2m_2} \quad\longrightarrow\quad p^2 = p_1^2\,(1+k) \quad\longrightarrow\quad p = p_1\sqrt{1+k}\,.$$

Подставляя сюда p, находим ϑ:

$$2p_1\cos\frac{\vartheta}{2} = p_1\sqrt{1+k} \quad\longrightarrow\quad \cos\frac{\vartheta}{2} = \frac{\sqrt{1+k}}{2} \quad\longrightarrow\quad \vartheta = 2\arccos\frac{\sqrt{1+k}}{2} = 37^\circ$$

Ответ:

$$\vartheta = 2\arccos\frac{\sqrt{1+k}}{2} = 37^\circ$$

Задача 4.1 В закрытый калориметр, содержащий лёд массой $m_{\text{л}} = 100$ г при температуре $t_{\text{л}} = -10$ °C, впустили водяной пар массой $m_{\text{п}} = 10$ г при температуре $t_{\text{п}} = 100$ °C. Найдите массу $m_{\text{в}}$ воды, образовавшейся в калориметре после установления теплового равновесия. Удельная теплоёмкость льда $C_{\text{л}} = 2{,}1$ кДж/(кг °C), удельная теплоёмкость воды $C_{\text{в}} = 4{,}2$ кДж/(кг °C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 335$ кДж/кг, удельная теплота парообразования воды $L = 2260$ кДж/кг. Теплоёмкость калориметра не учитывайте. Ответ выразите в граммах и округлите до целого.

Возможное решение.

Выясним, растает ли весь лёд. Количество теплоты, необходимое для нагревания массы $m_{\text{л}}$ льда от начальной температуры $t_{\text{л}}$ до температуры плавления 0 °C равно:

$$Q_1 = m_{\text{л}} C_{\text{л}} (\, 0\ °\text{C} - t_{\text{л}}\,) = 0,1 \cdot 2,1 \cdot 10 = 2,1 \text{ кДж}\,.$$

Количество теплоты, необходимое для плавления всего льда при температуре 0 °C, равно:

$$Q_2 = m_{\text{л}} \lambda = 0,1 \cdot 335 = 33,5 \text{ кДж}\,.$$

В сумме имеем:

$$Q_{12} = Q_1 + Q_2 = 35,6 \text{ кДж}\,.$$

Тепло выделяется при конденсации пара и охлаждении образовавшейся воды. Количество теплоты, выделившееся при конденсации, равно:

$$Q_3 = m_{\text{п}} L = 0,01 \cdot 2260 = 22,6 \text{ кДж}\,.$$

Максимальное количество теплоты, которое может выделиться при охлаждении сконденсировавшейся воды, соответствует её охлаждению до 0 °C:

$$Q_4 = m_{\text{п}} C_{\text{в}} (\, t_{\text{п}} - 0\ °\text{C}\,) = 0,01 \cdot 4,2 \cdot 100 = 4,2 \text{ кДж}\,.$$

В сумме имеем:

$$Q_{34} = Q_3 + Q_4 = 26,8 \text{ кДж}\,.$$

Как видно, выполняются неравенства:

$$Q_1 < Q_{34} < Q_{12}\,,$$

которые означают, что максимальное количество теплоты, которое может выделиться при конденсации пара и охлаждении воды, достаточно для нагревания льда до температуры плавления, но недостаточно для плавления всего льда. Поэтому в конечном состоянии в калориметре будет смесь воды и льда при температуре 0 °C. Найдём массу m растаявшего льда:

$$Q_{34} = Q_1 + m\,\lambda \quad \longrightarrow \quad m = \frac{Q_{34} - Q_1}{\lambda} = \frac{26,8 - 2,1}{335} = 0,074 \text{ кг} = 74 \text{ г}$$

Масса воды в калориметре складывается из массы $m_{\text{п}}$ сконденсировавшейся воды и массы m растаявшего льда:

$$m_{\text{в}} = m_{\text{п}} + m = 10 \text{ г} + 74 \text{ г} = 84 \text{ г}$$

Ответ: $m_{\text{в}} = 84$ г

Задача 4.2 В калориметр, содержащий переохлаждённую воду массой $m = 100$ г при температуре $t = -5$ °C, положили кусок льда той же массы m при температуре 0 °C. Найдите массу M льда, образовавшегося в калориметре после установления теплового равновесия. Удельная теплоёмкость воды $C = 4{,}2$ кДж/(кг °C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 335$ кДж/кг. Теплоёмкость калориметра не учитывайте. Ответ выразите в граммах и округлите до целого.

Возможное решение.

Рассмотрим теплообмен между массой m переохлаждённой воды и такой же массой льда. Количество теплоты, необходимое для нагревания воды от начальной температуры t до 0 °C, равно:

$$Q_1 = m\,C\,(\,0\ ^\circ\mathrm{C} - t\,) = 0,1 \cdot 4,2 \cdot 5 = 2,1\ \text{кДж}\,.$$

При замерзании всей массы воды при 0 °C выделяется количество теплоты

$$Q_2 = m\,\lambda\,.$$

Максимальное количество теплоты, которое может отдать вода, равно:

$$Q_{21} = Q_2 - Q_1\,.$$

Для того чтобы расплавить массу m льда при температуре 0 °C, необходимо затратить количество теплоты Q_2. Неравенство

$$Q_{21} < Q_2$$

означает, что вся исходная масса воды замерзнёт и за счёт выделившегося тепла растает некоторая масса m' имевшегося льда. В конечном состоянии в калориметре будет смесь воды и льда при температуре 0 °C. Найдём массу m' растаявшего льда:

$$Q_{21} = m'\,\lambda \quad \longrightarrow \quad m' = \frac{Q_{21}}{\lambda} = \frac{Q_2 - Q_1}{\lambda} = \frac{m\,\lambda - Q_1}{\lambda} = m - \frac{Q_1}{\lambda}\,.$$

Конечная масса M льда в калориметре складывается из массы m замёрзшей воды и массы $m - m'$ нерастаявшего льда:

$$M = m + m - m' = 2m - m + \frac{Q_1}{\lambda} = m + \frac{Q_1}{\lambda} = 0,1 + \frac{2,1}{335} = 0,106\ \text{кг} = 106\ \text{г}$$

Ответ: $M = 106$ г

Задача 4.3 В калориметр, содержащий воду массой $m = 150$ г при температуре 0 °C, положили кусок льда той же массы m при температуре $t = -20$ °C. Найдите массу M воды, образовавшейся в калориметре после установления теплового равновесия. Удельная теплоёмкость льда $C = 2{,}1$ кДж/(кг °C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 335$ кДж/кг. Теплоёмкость калориметра не учитывайте. Ответ выразите в граммах и округлите до целого.

Возможное решение.

Рассмотрим теплообмен между массами m воды и льда. Количество теплоты, необходимое для нагревания льда от начальной температуры t до $0\ {}^\circ\mathrm{C}$, равно:

$$Q_1 = m\,C\,(\,0\ {}^\circ\mathrm{C} - t\,) = 0,15 \cdot 2,1 \cdot 20 = 6,3\ \text{кДж}\,.$$

Для того чтобы расплавить весь лёд при температуре $0\ {}^\circ\mathrm{C}$, необходимо затратить количество теплоты

$$Q_2 = m\,\lambda\,.$$

В сумме имеем количество теплоты, необходимое для плавление всей массы льда:

$$Q_{12} = Q_1 + Q_2\,.$$

Максимальное количество теплоты, которое может отдать вода при замерзании, равно Q_2. Неравенство

$$Q_2 < Q_{12}$$

означает, что вся исходная масса воды замерзнёт и за счёт выделившегося тепла растает некоторая масса M имевшегося льда. В конечном состоянии в калориметре будет смесь воды и льда при температуре $0\ {}^\circ\mathrm{C}$. При этом масса воды равна массе M растаявшего льда. Найдём эту массу:

$$Q_2 = Q_1 + M\,\lambda \;\longrightarrow\; M = \frac{Q_2 - Q_1}{\lambda} = \frac{m\,\lambda - Q_1}{\lambda} = m - \frac{Q_1}{\lambda} = 0,15 - \frac{6,3}{335} = 0,131\ \text{кг} = 131\ \text{г}$$

Ответ: $M = 131$ г

Электростатика

Задача 5.1 Каждая из трёх проводящих концентрических сфер радиусами $R = 5$ см, $2R$ и $4R$ несёт заряд $q = 0{,}2$ нК. Среднюю и внешнюю сферы соединяют тонким проводом. Найдите установившийся потенциал φ внутренней сферы. Ответ выразите в вольтах. Считайте, что $k = 1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

Возможное решение.

Пусть q_1 и q_2 — конечные заряды средней и внешней сфер, φ_1 и φ_2 — их потенциалы. Учитывая, что потенциал внутри заряженной сферы постоянен и равен потенциалу на её поверхности, имеем:

$$\varphi_1 = \frac{k\,q}{2R} + \frac{k\,q_1}{2R} + \frac{k\,q_2}{4R} = \frac{k\,(2q + 2q_1 + q_2)}{4R}\,,$$

$$\varphi_2 = \frac{k\,q}{4R} + \frac{k\,q_1}{4R} + \frac{k\,q_2}{4R} = \frac{k\,(q + q_1 + q_2)}{4R}\,.$$

Так как средняя и внешняя сферы соединены проводом, то они образуют единый проводник, потенциал которого во всех его точках одинаков. Приравнивая φ_1 и φ_2, получаем:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad\longrightarrow\quad 2q + 2q_1 + q_2 = q + q_1 + q_2 \quad\longrightarrow\quad q + q_1 = 0 \quad\longrightarrow\quad q_1 = -q\,.$$

Из закона сохранения заряда имеем:

$$q_1 + q_2 = 2q \quad\longrightarrow\quad q_2 = 2q - q_1 = 3q$$

Потенциал внутренней сферы равен:

$$\varphi = \frac{k\,q}{R} + \frac{k\,q_1}{2R} + \frac{k\,q_2}{4R} = \frac{k\,(4q + 2q_1 + q_2)}{4R} = \frac{k\,(4q - 2q + 3q)}{4R} = \frac{5}{4}\cdot\frac{k\,q}{R}$$

Подставим числовые значения:

$$\varphi = \frac{5}{4}\cdot\frac{9\cdot 10^{\,9}\cdot 0,2\cdot 10^{\,-9}}{0,05} = 45 \text{ В}$$

Ответ:

$$\varphi = \frac{5}{4}\cdot\frac{kq}{R} = 45 \text{ В}$$

Задача 5.2 Каждая из трёх проводящих концентрических сфер радиусами $R = 10$ см, $2R$ и $4R$ несёт заряд $q = 0{,}4$ нК. Внутреннюю и внешнюю сферы соединяют тонким проводом (провод не касается средней сферы). Найдите установившийся потенциал φ средней сферы. Ответ выразите в вольтах. Считайте, что $k = 1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

Возможное решение.

Пусть q_1 и q_2 — конечные заряды внутренней и внешней сфер, φ_1 и φ_2 — их потенциалы. Учитывая, что потенциал внутри заряженной сферы постоянен и равен потенциалу на её поверхности, имеем:

$$\varphi_1 = \frac{k\,q_1}{R} + \frac{k\,q}{2R} + \frac{k\,q_2}{4R} = \frac{k\,(4q_1 + 2q + q_2)}{4R}\,,$$

$$\varphi_2 = \frac{k\,q_1}{4R} + \frac{k\,q}{4R} + \frac{k\,q_2}{4R} = \frac{k\,(q_1+q+q_2)}{4R}\,.$$

Так как внутренняя и внешняя сферы соединены проводом, то они образуют единый проводник, потенциал которого во всех его точках одинаков. Приравнивая φ_1 и φ_2, получаем:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \longrightarrow \quad 4q_1 + 2q + q_2 = q + q_1 + q_2 \quad \longrightarrow \quad 3q_1 + q = 0 \quad \longrightarrow \quad q_1 = -\frac{q}{3}\,.$$

Из закона сохранения заряда имеем:

$$q_1 + q_2 = 2q \quad \longrightarrow \quad q_2 = 2q - q_1 = q_1 = \frac{7q}{3}\,.$$

Потенциал средней сферы равен:

$$\varphi = \frac{k\,q_1}{2R} + \frac{k\,q}{2R} + \frac{k\,q_2}{4R} = \frac{k\,(2q_1+2q+q_2)}{4R} = \frac{k\,q}{4R}\left(-\frac{2}{3} + 2 + \frac{7}{3}\right) = \frac{11}{12}\cdot\frac{k\,q}{R}$$

Подставим числовые значения:

$$\varphi = \frac{11}{12}\cdot\frac{9\cdot 10^9\cdot 0,4\cdot 10^{-9}}{0,1} = 33\text{ В}$$

Ответ:

$$\varphi = \frac{11}{12}\cdot\frac{kq}{R} = 33\text{ В}$$

Задача 5.3 Внутри металлического сферического слоя находится металлический шар радиуса $R = 4$ см. Центры шара и слоя совпадают; внутренний радиус слоя равен $2R$, внешний — $4R$. Шар заземляют (заземляющий провод не касается слоя), а слою сообщают заряд $q = 2$ нК. Найдите потенциал слоя φ. Ответ выразите в вольтах. Считайте, что $k = 1/4\pi\varepsilon_0 = 9\cdot 10^9$ м/Ф.

Возможное решение.

Пусть q_1 — конечный заряд шара, q_2 и q_3 — заряды внутренней и внешней поверхностей слоя. Возьмём в слое произвольную точку, лежащую на расстоянии r от цетра системы. Напряжённость электрического поля в этой точке равна:

$$E = \frac{k\,q_1}{r^2} + \frac{k\,q_2}{r^2} = \frac{k\,(q_1+q_2)}{r^2}\,.$$

Так как электрического поля в металле нет, то

$$E = 0 \quad \longrightarrow \quad q_1 + q_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad q_2 = -q_1\,.$$

Из закона сохранения заряда имеем:

$$q_2 + q_3 = q \quad \longrightarrow \quad q_3 = q - q_2 = q + q_1\,.$$

Найдём заряд q_1. Для этого рассмотрим потенциал шара φ_1:

$$\varphi_1 = \frac{k\,q_1}{R} + \frac{k\,q_2}{2R} + \frac{k\,q_3}{4R} = \frac{k\,(4q_1+2q_2+q_3)}{4R}\,.$$

Так как шар заземлён, то его потенциал равен потенциалу бесконечно удалённой точки, который принят за нуль:

$$\varphi_1 = 0 \;\rightarrow\; 4q_1 + 2q_2 + q_3 = 0 \;\rightarrow\; 4q_1 - 2q_1 + q + q_1 = 0 \;\rightarrow\; 3q_1 + q = 0 \;\rightarrow\; q_1 = -\frac{q}{3}\,.$$

Заряды q_2 и q_3 равны:

$$q_2 = -q_1 = \frac{q}{3}\,, \quad q_3 = q + q_1 = \frac{2q}{3}\,.$$

Потенциал φ металлического слоя одинаков во всех его точках. Вычислим его в произвольной точке слоя, лежащей на расстоянии r от цетра системы:

$$\varphi = \frac{k\,q_1}{r} + \frac{k\,q_2}{r} + \frac{k\,q_3}{4R} = \frac{k\,(q_1+q_2)}{r} + \frac{k\,q_3}{4R} = \frac{k\,q_3}{4R}\,.$$

В силу равенства $q_2 = -q_1$ зависимость от r выпала. Окончательно получаем:

$$\varphi = \frac{k\,q_3}{4R} = \frac{k\,(2q/3)}{4R} = \frac{1}{6}\cdot\frac{k\,q}{R}$$

Подставим числовые значения:

$$\varphi = \frac{1}{6}\cdot\frac{9\cdot 10^{\,9}\cdot 2\cdot 10^{\,-9}}{0,04} = 75 \text{ В}$$

Ответ:

$$\varphi = \frac{1}{6}\cdot\frac{kq}{R} = 75 \text{ В}$$

Задача 5.4 Твердый однородный диэлектрик с проницаемостью $\varepsilon = 3$ заполняет всё пространство за исключением сферической полости радиуса $R = 5$ см. В полости находится металлический шар радиуса $R/2$, несущий заряд $q = 0{,}15$ нК. Центры шара и полости совпадают. Найдите потенциал шара φ. Ответ выразите в вольтах. Считайте, что $k = 1/4\pi\varepsilon_0 = 9\cdot 10^9$ м/Ф.

Возможное решение.

В электрическом поле шара диэлектрик поляризуется. На его внутренней поверхности возникает некоторый заряд Q. Для того чтобы найти его, рассмотрим в диэлектрике некоторую точку, лежащую на расстоянии r от центра шара. Напряжённость электрического поля в этой точке равна:

$$E = \frac{k\,q}{\varepsilon\, r^2}\,.$$

Физической причиной ослабления поля в диэлектрике является наличие поляризационного заряда Q, действие которого частично компенсирует электрическое поле шара. Поэтому заменим диэлектрик сферой радиуса R, несущей заряд Q. Тогда для напряжённости поля в диэлектрике имеем:

$$E = \frac{k\,q}{r^2} + \frac{k\,Q}{r^2} = \frac{k\,(q+Q)}{r^2}\,.$$

Приравнивая два выражения для E, находим заряд Q:

$$\frac{k\,q}{\varepsilon\, r^2} = \frac{k\,(q+Q)}{r^2} \quad\longrightarrow\quad \frac{q}{\varepsilon} = q + Q \quad\longrightarrow\quad Q = \frac{q}{\varepsilon} - q = -q\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = -\frac{q\,(\varepsilon-1)}{\varepsilon}\,.$$

Потенциал шара равен:

$$\varphi = \frac{k\,q}{R/2} + \frac{k\,Q}{R} = \frac{k\,(2q+Q)}{R} = \frac{k\,q}{R}\,\left(2 - 1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}\cdot\frac{k\,q}{R}$$

Подставим числовые значения:

$$\varphi = \frac{4}{3}\cdot\frac{9\cdot 10^{9}\cdot 0,15\cdot 10^{-9}}{0,05} = 36\ \text{В}$$

Ответ:

$$\varphi = \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}\cdot\frac{kq}{R} = 36\ \text{В}$$

Задача 5.5 К металлическому шару радиуса $R = 4$ см прилегает сферический слой твердого однородного диэлектрика с проницаемостью $\varepsilon = 2$. Внешний радиус слоя равен $3R$. Шару сообщают заряд $q = 0{,}7$ нК. Найдите потенциал шара φ. Ответ выразите в вольтах. Считайте, что $k = 1/4\pi\varepsilon_0 = 9\cdot 10^9$ м/Ф.

Возможное решение.

В электрическом поле шара диэлектрик поляризуется. На его внутренней поверхности возникает некоторый заряд Q. В силу электронейтральпости диэлектрика, заряд на его внешней поверхности равен $-Q$. Для того чтобы найти эти заряды, рассмотрим в диэлектрике некоторую точку, лежащую на расстоянии r от центра шара. Напряжённость электрического поля в этой точке равна:

$$E = \frac{k\,q}{\varepsilon\,r^2}\,.$$

Физической причиной ослабления поля в диэлектрике является наличие поляризационных зарядов, действие которых частично компенсирует электрическое поле шара. Поэтому заменим диэлектрический слой двумя сферами, совпадающими с границами диэлектрика. Внутренняя сфера имеет радиус R и несёт заряд Q, внешняя — радиус $3R$ и заряд $-Q$. Тогда для напряжённости поля в диэлектрике имеем:

$$E = \frac{k\,q}{r^2} + \frac{k\,Q}{r^2} = \frac{k\,(q+Q)}{r^2}\,.$$

Приравнивая два выражения для E, находим заряд Q:

$$\frac{k\,q}{\varepsilon\,r^2} = \frac{k\,(q+Q)}{r^2} \quad\longrightarrow\quad \frac{q}{\varepsilon} = q + Q \quad\longrightarrow\quad Q = \frac{q}{\varepsilon} - q = -q\,\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = -\frac{q\,(\varepsilon-1)}{\varepsilon}\,.$$

Потенциал шара равен:

$$\varphi = \frac{k\,q}{R} + \frac{k\,Q}{R} - \frac{k\,Q}{3R} = \frac{k\,(3q+3Q-Q)}{3R} = \frac{k\,(3q+2Q)}{3R} = \frac{k\,q}{3R}\,\left(3 - 2 + \frac{2}{\varepsilon}\right) = \frac{\varepsilon+2}{3\,\varepsilon}\cdot\frac{k\,q}{R}$$

Подставим числовые значения:

$$\varphi = \frac{4}{6}\cdot\frac{9\cdot 10^{9}\cdot 0,7\cdot 10^{-9}}{0,04} = 105\ \text{В}$$

Ответ:

$$\varphi = \frac{\varepsilon+2}{3\,\varepsilon}\cdot\frac{kq}{R} = 105\ \text{В}$$

Конденсаторы

Задача 6.1 Два конденсатора ёмкости $C = 1{,}6$ мкФ каждый заряжены до напряжений $V_1 = 100$ В и $V_2 = 60$ В. Конденсаторы соединяют одноимённо заряженными обкладками. Пренебрегая излучением, найдите количество теплоты Q, выделившееся в соединительных проводах. Ответ выразите в миллиджоулях.

Возможное решение.

До соединения обкладок заряды конденсаторов равны $C\,V_1$ и $C\,V_2$. После соединения на конденсаторах устанавливаются одинаковые напряжения. Так как ёмкости равны, то конденсаторы приобретают один и тот же конечный заряд q. Из закона сохранения заряда имеем:

$$2q = C\,V_1 + C\,V_2 \quad \longrightarrow \quad q = \frac{C\,(\,V_1 + V_2\,)}{2}\,.$$

Запишем баланс энергии в цепи:

$$W_1 = W_2 + Q\,,$$

W_1 и W_2 — начальная и конечная энергии конденсаторов, Q — выделившееся количество теплоты. Для энергий имеем:

$$W_1 = \frac{C\,V_1^2}{2} + \frac{C\,V_2^2}{2}\,,$$

$$W_2 = 2\cdot\frac{q^2}{2C} = \frac{C^2\,(\,V_1 + V_2\,)^2}{4C} = \frac{C\,(\,V_1 + V_2\,)^2}{4}\,.$$

Количество теплоты равно:

$$Q = W_1 - W_2 = \frac{C\,V_1^2}{2} + \frac{C\,V_2^2}{2} - \frac{C\,(\,V_1 + V_2\,)^2}{4}\,.$$

После несложных алгебраических преобразований получаем:

$$Q = \frac{C\,(\,V_1 - V_2\,)^2}{4}\,.$$

Подставим числовые значения:

$$Q = \frac{1,6\cdot 10^{-6}\cdot(100 - 60\,)^2}{4} = 0,64 \text{ мДж}$$

Ответ:

$$Q = \frac{C\,(V_1 - V_2)^2}{4} = 0{,}64 \text{ мДж}$$

Задача 6.2 Два конденсатора ёмкостями $C_1 = 0{,}3$ мкФ и $C_2 = 0{,}7$ мкФ заряжены до одного и того же напряжения $V = 100$ В. Конденсаторы соединяют разноимённо заряженными обкладками. Пренебрегая излучением, найдите количество теплоты Q, выделившееся в соединительных проводах. Ответ выразите в миллиджоулях.

Возможное решение.

Рассмотрим отрицательно заряженную обкладку первого конденсатора и положительно заряженную обкладку второго. До соединения заряды этих обкладок равны соответственно $(-C_1\,V)$ и $C_2\,V$. Так как $C_2 > C_1$, то суммарный заряд $(\,C_2 - C_1\,)\,V$ положителен.

Так как после соединения на конденсаторах устанавливается одинаковое напряжение U, каждая из рассматриваемых обкладок будет нести положительный заряд. Из закона сохранения заряда имеем:

$$C_1\,U + C_2\,U = (\,C_2 - C_1\,)\,V \quad\longrightarrow\quad U = \frac{C_2 - C_1}{C_2 + C_1}\,V\,.$$

Запишем баланс энергии в цепи:

$$W_1 = W_2 + Q\,,$$

W_1 и W_2 — начальная и конечная энергии конденсаторов, Q — выделившееся количество теплоты. Для энергий имеем:

$$W_1 = \frac{C_1\,V^{\,2}}{2} + \frac{C_2\,V^{\,2}}{2} = \frac{(\,C_1 + C_2\,)\,V^{\,2}}{2}\,,$$

$$W_2 = \frac{C_1\,U^{\,2}}{2} + \frac{C_2\,U^{\,2}}{2} = \frac{(\,C_1 + C_2\,)\,U^{\,2}}{2}\,.$$

Количество теплоты равно:

$$Q = W_1 - W_2 = \frac{(\,C_1 + C_2\,)\,(\,V^{\,2} - U^{\,2}\,)}{2}\,.$$

После несложных алгебраических преобразований получаем:

$$Q = \frac{2\,C_1\,C_2\,V^{\,2}}{C_1 + C_2}\,.$$

Подставим числовые значения:

$$Q = \frac{2\cdot 0,3\cdot 10^{-6}\cdot 0,7\cdot 10^{-6}\cdot 10^{4}}{(\,0,3 + 0,7\,)\cdot 10^{-6}} = 4,2\ \text{мДж}$$

Ответ:

$$Q = \frac{2\,C_1C_2V^2}{C_1 + C_2} = 4{,}2\ \text{мДж}$$

Задача 6.3 Конденсатор емкости $C = 1{,}5$ мкФ заряжают до напряжения $V = 30$ В и через резистор присоединяют к батарее с ЭДС $\varepsilon = 10$ В (положительно заряженная обкладка конденсатора присоединяется к отрицательному полюсу батареи). Пренебрегая излучением, найдите количество теплоты Q, выделившееся в цепи. Ответ выразите в миллиджоулях.

Возможное решение.

До и после присоединения к батарее заряды конденсатора равны соответственно $q_1 = C\,V$ и $q_2 = C\,\varepsilon$. При этом знаки зарядов на обкладках конденсатора после присоединения к батарее меняются на противоположные. Поэтому через батарею в направлении действия эдс проходит положительный заряд $(\,q_1 + q_2\,)$ и батарея совершает работу

$$A = (\,q_1 + q_2\,)\,\varepsilon = C\,(\,V + \varepsilon\,)\,\varepsilon\,.$$

Запишем баланс энергии в цепи:

$$A = W_2 - W_1 + Q\,,$$

W_1 и W_2 — начальная и конечная энергии конденсатора, Q — выделившееся количество теплоты. Для энергий имеем:

$$W_1 = \frac{C\,V^{\,2}}{2}\,, \qquad W_2 = \frac{C\,\varepsilon^{\,2}}{2}\,.$$

Количество теплоты равно:

$$Q = A - W_2 + W_1 = C\,(\,V + \varepsilon\,)\,\varepsilon - \frac{C\,\varepsilon^{\,2}}{2} + \frac{C\,V^{\,2}}{2}\,.$$

После несложных алгебраических преобразований получаем:

$$Q = \frac{C\,(\,\varepsilon + V\,)^{\,2}}{2}\,.$$

Подставим числовые значения:

$$Q = \frac{1,5 \cdot 10^{\,-6} \cdot (\,10 + 30\,)^{\,2}}{2} = 1,2\ \text{мДж}$$

Ответ:

$$Q = \frac{C\,(\varepsilon + V)^2}{2} = 1{,}2\ \text{мДж}$$

Задача 6.4 Конденсатор емкости C = 1,5 мкФ заряжают до напряжения V = 30 В и через резистор присоединяют к батарее с ЭДС ε = 10 В (положительно заряженная обкладка конденсатора присоединяется к положительному полюсу батареи). Пренебрегая излучением, найдите количество теплоты Q, выделившееся в цепи. Ответ выразите в миллиджоулях.

Возможное решение.

До и после присоединения к батарее заряды конденсатора равны соответственно $q_1 = C\,V$ и $q_2 = C\,\varepsilon$. При этом знаки зарядов на обкладках конденсатора после присоединения к батарее не меняются. Через батарею в направлении действия эдс проходит заряд $(\,q_2 - q_1\,)$ и батарея совершает работу

$$A = (\,q_2 - q_1\,)\,\varepsilon = C\,(\,\varepsilon - V\,)\,\varepsilon\,.$$

При $\varepsilon < V$ работа батареи отрицательна. Запишем баланс энергии в цепи:

$$A = W_2 - W_1 + Q\,,$$

W_1 и W_2 — начальная и конечная энергии конденсатора, Q — выделившееся количество теплоты. Для энергий имеем:

$$W_1 = \frac{C\,V^{\,2}}{2}\,, \qquad W_2 = \frac{C\,\varepsilon^{\,2}}{2}\,.$$

Количество теплоты равно:

$$Q = A - W_2 + W_1 = C\,(\,\varepsilon - V\,)\,\varepsilon - \frac{C\,\varepsilon^2}{2} + \frac{C\,V^2}{2}\,.$$

После несложных алгебраических преобразований получаем:

$$Q = \frac{C\,(\,\varepsilon - V\,)^2}{2}\,.$$

Подставим числовые значения:

$$Q = \frac{1,5 \cdot 10^{-6} \cdot (\,10 - 30\,)^2}{2} = 0,3 \text{ мДж}$$

Ответ:

$$Q = \frac{C\,(\varepsilon - V)^2}{2} = 0{,}3 \text{ мДж}$$

Задача 6.5 Конденсатор ёмкости $C = 10$ пФ заряжен до напряжения $V = 48$ В. При помощи длинных тонких проводов отрицательную обкладку конденсатора заземляют, а положительную присоединяют к незаряженному металлическому шару радиуса $R = 3$ см. Найдите
установившийся потенциал шара. Ответ выразите в вольтах. Считайте, что $k = 1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

Возможное решение.

До соединения с шаром заряд конденсатора равен $q_1 = C\,V$. Пусть q_2 — заряд конденсатора после соединения с шаром, q_3 — заряд шара. Из закона сохранения заряда имеем:

$$q_1 = q_2 + q_3\,.$$

Обозначим через φ установившийся потециал шара. Потенциал соединённой с шаром обкладки конденсатора также равен φ, поскольку шар и обкладка образуют единый проводник, потенциал которого одинаков во всех его точках. Потенциал заземлённой обкладки равен потенциалу бесконечно удалённой точки, который принимается за нуль. Таким образом, конечное напряжение на конденсаторе равно потенциалу φ. Тогда

$$q_2 = C\,\varphi\,.$$

Так как шар и конденсатор расположены на большом расстоянии друг от друга, то

$$\varphi = \frac{k\,q_3}{R} \quad\longrightarrow\quad q_3 = \frac{\varphi\,R}{k}\,.$$

Из полученных соотношений находим потенциал φ:

$$C\,V = C\,\varphi + \frac{\varphi\,R}{k} \quad\longrightarrow\quad C\,V = C\,\varphi\left(1 + \frac{R}{k\,C}\right) \quad\longrightarrow\quad \varphi = \frac{V}{1 + (R/k\,C\,)}\,.$$

Подставим числовые значения:

$$1 + \frac{R}{k\,C} = 1 + \frac{3 \cdot 10^{-2}}{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-11}} = \frac{4}{3} \quad\longrightarrow\quad \varphi = \frac{3}{4} \cdot 48 = 36 \text{ В}$$

Ответ:

$$\varphi = \frac{V}{1 + (R/kC)} = 36 \text{ В}$$

Задача 6.6 При помощи длинных тонких проводов одну из обкладок незаряженного конденсатора заземляют, а другую присоединяют к металлическому шару радиуса $R = 6$ см, заряженному до потенциала $\varphi = 56$ В. Ёмкость конденсатора $C = 20$ пФ. Найдите установившееся напряжение на конденсаторе. Ответ выразите в вольтах. Считайте, что $k = 1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

Возможное решение.

Обозначим через q_1 начальный заряд шара. Тогда

$$\varphi = \frac{k\,q_1}{R} \quad \longrightarrow \quad q_1 = \frac{\varphi R}{k}\,.$$

Пусть q_2 и q_3 — конечные заряды шара и конденсатора, V — искомое напряжение на конденсаторе. Из закона сохранения заряда имеем:

$$q_1 = q_2 + q_3\,.$$

Заряд q_3 связан с напряжением V соотношением

$$q_3 = C\,V\,.$$

Потенциал заземлённой обкладки конденсатора равен потенциалу бесконечно удалённой точки, который принят за нуль. Потенциал обкладки, соединённой с шаром, равен потенциалу шара, поскольку шар и обкладка образуют единый проводник, потенциал которого одинаков во всех его точках. Таким образом, конечный потенциал шара равен напряжению на конденсаторе. Так как шар и конденсатор расположены на большом расстоянии друг от друга, то

$$V = \frac{k\,q_2}{R} \quad \longrightarrow \quad q_2 = \frac{V R}{k}\,.$$

Из полученных соотношений находим напряжение V:

$$\frac{\varphi R}{k} = \frac{V R}{k} + C\,V \quad \longrightarrow \quad \frac{\varphi R}{k} = \frac{V R}{k}\left(1 + \frac{k\,C}{R}\right) \quad \longrightarrow \quad V = \frac{\varphi}{1 + (\,k\,C/R\,)}\,.$$

Подставим числовые значения:

$$1 + \frac{k\,C}{R} = 1 + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-11}}{6 \cdot 10^{-2}} = 4 \quad \longrightarrow \quad V = \frac{56}{4} = 14 \text{ В}$$

Ответ:

$$V = \frac{\varphi}{1 + (kC/R)} = 14 \text{ В}$$