Межрегиональная предметная олимпиада Казанского федерального университета
по предмету «Физика»
Очный тур
2014-2015 учебный год

11 класс

Вариант 1

Возможные решения

Задача 1. (20 баллов)
Идеальный одноатомный газ совершает цикл, состоящий из двух изобар и двух адиабат. Найти КПД этого цикла, если известно, что максимальное давление газа в данном цикле вдвое превышает минимальное.
Примечание. Адиабатный процесс описывается уравнением Пуассона: $pV^{5/3} = \text{const}$.

Ответ: $\eta = 1 - 2^{-2/5} \approx 0{,}24$.

Решение: Очевидно, что в указанном цикле (см. рис. 10) теплота подводится к газу или отдаётся им только в изобарных процессах.

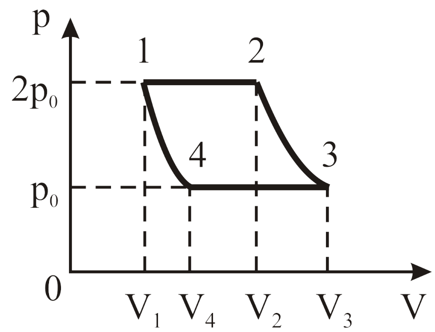

Рис. 10.

Найдём полученное Q_+ и отданное Q_- количество теплоты ($\Delta V_{12} = V_2 - V_1$, $\Delta V_{43} = V_3 - V_4$):

$$Q_+ = Q_{12} = \frac{3}{2}\nu R\Delta T_{12} + 2p_0\Delta V_{12} = 5p_0\Delta V_{12},$$

$$Q_- = Q_{43} = \frac{3}{2}\nu R\Delta T_{43} + p_0\Delta V_{43} = \frac{5}{2}p_0\Delta V_{43}.$$

Так как участки 23 и 41 представляют собой адиабаты, получим, что

$$\begin{cases} 2p_0V_1^{5/3} = p_0V_4^{5/3} \\ 2p_0V_2^{5/3} = p_0V_3^{5/3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_4 = V_1 \cdot 2^{3/5} \\ V_3 = V_2 \cdot 2^{3/5} \end{cases} \Rightarrow \Delta V_{43} = \Delta V_{12} \cdot 2^{3/5}.$$

Подставим теперь полученные выражения в формулу для КПД цикла:

$$\eta = 1 - \frac{Q_-}{Q_+} = 1 - \frac{(5/2)p_0\,\Delta V_{43}}{5p_0\,\Delta V_{12}} = 1 - 2^{-2/5} \approx 0{,}24.$$

Задача 2. (20 баллов)

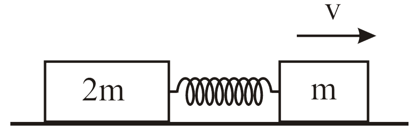

Рис. 11.

На горизонтальной поверхности покоятся два бруска, связанные пружиной жёсткости k (см. рис. 11). В начальный момент пружина находится в недеформированном состоянии. Какую наименьшую скорость v следует сообщить правому бруску, чтобы левый брусок также пришёл в движение? Коэффициент трения обоих брусков о поверхность равен μ.

Ответ: $v = \mu g\sqrt{\dfrac{8m}{k}}$.

Решение: Пусть x — расстояние, пройденное праым бруском до остановки. Кинетическая энергия, сообщённая ему, тратится на работу против силы трения и изменение потенциальной энергии деформированной пружины:

$$\frac{mv^2}{2} = A_{\text{против тр}} + \frac{kx^2}{2} = \mu mgx + \frac{kx^2}{2}.$$

Левый брусок сдвинется с места, если величина силы упругости, возникшей в этом случае, превысит величину действующей на него силы трения покоя. В предельном случае можно записать, что

$$kx = \mu 2mg \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2\mu mg}{k}.$$

Подставляя найденное значение x, получаем

$$\frac{mv^2}{2} = \mu mg\cdot\frac{2\mu mg}{k} + \frac{k}{2}\left(\frac{2\mu mg}{k}\right)^2 = \frac{4\mu^2m^2g^2}{k} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{8\mu^2mg^2}{k} \quad \Rightarrow \quad v = \mu g\sqrt{\frac{8m}{k}}.$$

Задача 3. (20 баллов)

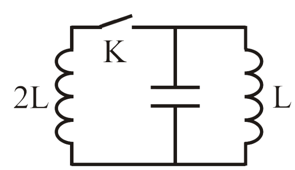

Рис. 12.

Конденсатор, имеющий заряд q, разряжается через катушку с индуктивностью L (см. рис. 12). Когда заряд на конденсаторе становится равным нулю, замыкают ключ K. Найти максимальное значение заряда конденсатора после замыкания ключа. Индуктивность второй катушки равна 2L.

Ответ: $q\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Решение: Пусть C — ёмкость конденсатора. Используя закон сохранения энергии, найдём силу тока I_0 в правой катушке в тот момент, когда заряд на конденсаторе равен нулю

$$\frac{q^2}{2C} = \frac{LI_0^2}{2} \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{q}{\sqrt{LC}}.$$

При замыкании ключа в цепь включается левая катушка. Рассматривая контур, содержащий обе катушки индуктивности, получим (I_1 и I_2 — токи, текущие через правую и левую катушку соответственно)

$$LI_1' + 2LI_2' = 0 \quad \Rightarrow \quad LI_1 + 2LI_2 = \text{const}.$$

Так как в момент замыкания ключа $I_1 = I_0$, а $I_2 = 0$, найденное соотношение можно переписать в виде

$$LI_1 + 2LI_2 = LI_0 \quad \Rightarrow \quad I_1 + 2I_2 = I_0.$$

С другой стороны, в тот момент, когда заряд на конденсаторе снова достигнет максимума, ток через конденсатор не течёт и, следовательно, $I_2 = I_1 = I_0/3$.

Запишем ещё раз закон сохранения энергии и найдём максимальное значение заряда конденсатора $\tilde{q}$ после замыкания ключа

$$\frac{q^2}{2C} = \frac{\tilde{q}^2}{2C} + \frac{LI_1^2}{2} + \frac{2LI_2^2}{2} = \frac{\tilde{q}^2}{2C} + \frac{LI_0^2}{6} = \frac{\tilde{q}^2}{2C} + \frac{q^2}{6C} \quad \Rightarrow \quad \tilde{q}^2 = \frac{2q^2}{3} \quad \Rightarrow \quad \tilde{q} = q\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Задача 4. (20 баллов)
Длинная, очень тонкая прямая нить — световод — изготовлена из прозрачного материала с показателем преломления $n = \sqrt{1{,}75}$. Один из концов нити прижат к источнику рассеянного света. Другой конец нити размещён на расстоянии $L = 5$ см от расположенного перпендикулярно световоду экрана. Найти диаметр D светового пятна на экране. Считать, что диаметр световода много меньше, чем D.

Ответ: $D = 17{,}3$ см.

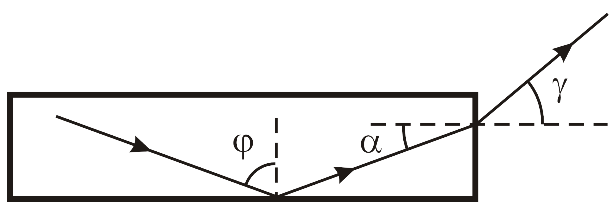

Рис. 13.

Решение: Через очень длинный световод пройдут только те лучи, которые падают на границу с воздухом под углом, большим угла полного отражения. Остальные лучи будут терять энергию за счёт преломления и до конца практически не дойдут. Граница светового пятна на экране будет определяться лучами, идущими под предельным углом φ (см. рис. 13) и выходящими из торца световода (напомним, что его диаметр считается пренебрежимо малым). Для этих лучей $\sin\varphi = 1/n$. С другой стороны, по закону Снеллиуса $\sin\gamma = n\sin\alpha$. Отсюда, учитывая, что $\cos\alpha = \sin\varphi = 1/n$, получим

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n} \quad \Rightarrow \quad \sin\gamma = n\sin\alpha = \sqrt{n^2-1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 60^\circ.$$

Найдём теперь диаметр светового пятна:

$$D = 2L\,\mathrm{tg}\,\gamma = 2L\sqrt{3} \approx 17{,}3 \text{ см}.$$

Задача 5. (20 баллов)
Легковая машина движется по горизонтальному шоссе за грузовиком. В протекторе заднего колеса грузовика застрял камень. На каком минимальном расстоянии s от грузовика может ехать легковая машина, чтобы камень, вырвавшийся из колеса грузовика, не долетел до неё? Машины движутся со скоростью $v = 72$ км/ч. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

Ответ: 40 м.

Решение: Перейдём в систему отсчёта, связанную с движущимися машинами. Относительно неё камень, застрявший в колесе, вылетает со скоростью $v = 72$ км/ч $= 20$ м/с, равной линейной скорости вращения обода колеса. Вылетевший камень пролетит расстояние $L = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$, где α — угол, под которым направлена его начальная скорость. Так как угол α может быть любым, минимальное безопасное расстояние s равно максимально возможному значению L, которое получается при $\alpha = 45^\circ$, то есть

$$s = \frac{v^2 \sin(2 \cdot 45^\circ)}{g} = \frac{v^2}{g} = 40 \text{ м}.$$

Межрегиональная предметная олимпиада Казанского федерального университета по предмету «Физика»
Очный тур
2014-2015 учебный год

11 класс

Вариант 2

Возможные решения

Задача 1. (20 баллов)
Идеальный одноатомный газ совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух адиабат. Найти КПД этого цикла, если известно, что максимальный объём газа в данном цикле вдвое превышает минимальный.
Примечание. Адиабатный процесс описывается уравнением Пуассона: $pV^{5/3} = \text{const}$.

Ответ: $\eta = 1 - 2^{-2/3} \approx 0{,}37$.

Решение: Очевидно, что в указанном цикле (см. рис. 14) теплота подводится к газу или отдаётся им только в изохорных процессах.

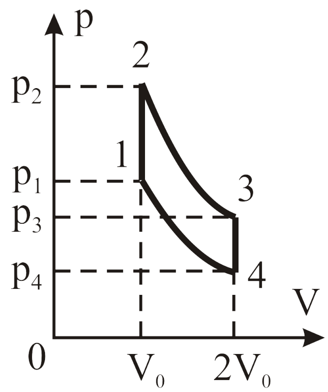

Рис. 14.

Найдём полученное Q_+ и отданное Q_- количество теплоты ($\Delta p_{12} = p_2 - p_1$, $\Delta p_{43} = p_3 - p_4$):

$$Q_+ = Q_{12} = \frac{3}{2}\nu R\Delta T_{12} = \frac{3}{2}V_0\Delta p_{12},$$

$$Q_- = Q_{43} = \frac{3}{2}\nu R\Delta T_{43} = 3V_0\Delta p_{43}.$$

Так как участки 23 и 41 представляют собой адиабаты, получим, что

$$\begin{cases} p_1V_0^{5/3} = p_4(2V_0)^{5/3} \\ p_2V_0^{5/3} = p_3(2V_0)^{5/3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_4 = p_1 \cdot 2^{-5/3} \\ p_3 = p_2 \cdot 2^{-5/3} \end{cases} \Rightarrow \Delta p_{43} = \Delta p_{12} \cdot 2^{-5/3}.$$

Подставим теперь полученные выражения в формулу для КПД цикла:

$$\eta = 1 - \frac{Q_-}{Q_+} = 1 - \frac{3V_0\Delta p_{43}}{(3/2)V_0\Delta p_{12}} = 1 - 2^{-2/3} \approx 0{,}37.$$

Задача 2. (20 баллов)

На горизонтальной поверхности покоятся два бруска, связанные пружиной жёсткости k (см. рис. 15). В начальный момент пружина находится в недеформированном состоянии. Какую наименьшую скорость v следует сообщить правому бруску, чтобы левый брусок также пришёл в движение? Коэффициент трения обоих брусков о поверхность равен μ.

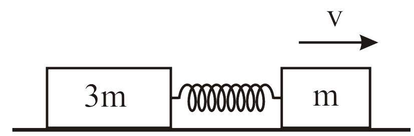

Рис. 15.

Ответ: $v = \mu g\sqrt{\dfrac{15m}{k}}$.

Решение: Пусть x — расстояние, пройденное праым бруском до остановки. Кинетическая энергия, сообщённая ему, тратится на работу против силы трения и изменение потенциальной энергии деформированной пружины:

$$\frac{mv^2}{2} = A_{\text{против тр}} + \frac{kx^2}{2} = \mu mgx + \frac{kx^2}{2}.$$

Левый брусок сдвинется с места, если величина силы упругости, возникшей в этом случае, превысит величину действующей на него силы трения покоя. В предельном случае можно записать, что

$$kx = \mu 3mg \quad\Rightarrow\quad x = \frac{3\mu mg}{k}.$$

Подставляя найденное значение x, получаем

$$\frac{mv^2}{2} = \mu mg\cdot\frac{3\mu mg}{k} + \frac{k}{2}\left(\frac{3\mu mg}{k}\right)^2 = \frac{15\mu^2m^2g^2}{2k} \quad\Rightarrow\quad v^2 = \frac{15\mu^2mg^2}{k} \quad\Rightarrow\quad v = \mu g\sqrt{\frac{15m}{k}}.$$

Задача 3. (20 баллов)

Конденсатор, имеющий заряд q, разряжается через катушку с индуктивностью 2L (см. рис. 16). Когда заряд на конденсаторе становится равным нулю, замыкают ключ K. Найти максимальное значение заряда конденсатора после замыкания ключа. Индуктивность второй катушки равна L.

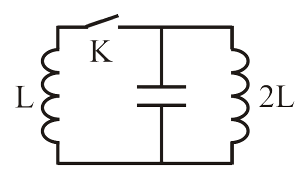

Рис. 16.

Ответ: $\dfrac{q}{\sqrt{3}}$.

Решение: Пусть C — ёмкость конденсатора. Используя закон сохранения энергии, найдём силу тока I_0 в правой катушке в тот момент, когда заряд на конденсаторе равен нулю

$$\frac{q^2}{2C} = \frac{2LI_0^2}{2} \quad\Rightarrow\quad I_0 = \frac{q}{\sqrt{2LC}}.$$

При замыкании ключа в цепь включается левая катушка. Рассматривая контур, содержащий обе катушки индуктивности, получим (I_1 и I_2 — токи, текущие через правую и левую катушку соответственно)

$$2LI_1' + LI_2' = 0 \quad\Rightarrow\quad 2LI_1 + LI_2 = \text{const}.$$

Так как в момент замыкания ключа $I_1 = I_0$, а $I_2 = 0$, найденное соотношение можно переписать в виде

$$2LI_1 + LI_2 = 2LI_0 \quad \Rightarrow \quad I_1 + I_2/2 = I_0.$$

С другой стороны, в тот момент, когда заряд на конденсаторе снова достигнет максимума, ток через конденсатор не течёт, и, следовательно, $I_2 = I_1 = 2I_0/3$.

Запишем ещё раз закон сохранения энергии и найдём максимальное значение заряда конденсатора $\tilde{q}$ после замыкания ключа

$$\frac{q^2}{2C} = \frac{\tilde{q}^2}{2C} + \frac{2LI_1^2}{2} + \frac{LI_2^2}{2} = \frac{\tilde{q}^2}{2C} + \frac{2LI_0^2}{3} = \frac{\tilde{q}^2}{2C} + \frac{q^2}{3C} \quad \Rightarrow \quad \tilde{q}^2 = \frac{q^2}{3} \quad \Rightarrow \quad \tilde{q} = \frac{q}{\sqrt{3}}.$$

Задача 4. (20 баллов)
Длинная, очень тонкая прямая нить — световод — изготовлена из прозрачного материала с показателем преломления $n = \sqrt{1{,}25}$. Один из концов нити прижат к источнику рассеянного света. Другой конец нити размещён на расстоянии $L = 7$ см от расположенного перпендикулярно световоду экрана. Найти диаметр D светового пятна на экране. Считать, что диаметр световода много меньше, чем D.

Ответ: $D = 8{,}1$ см.

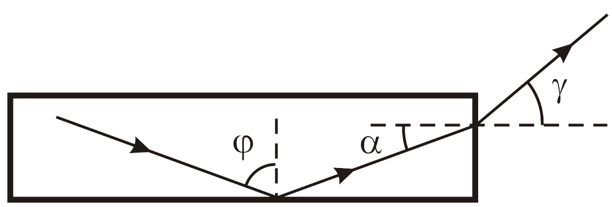

Рис. 17.

Решение: Через очень длинный световод пройдут только те лучи, которые падают на границу с воздухом под углом, большим угла полного отражения. Остальные лучи будут терять энергию за счёт преломления и до конца практически не дойдут. Граница светового пятна на экране будет определяться лучами, идущими под предельным углом φ (см. рис. 17) и выходящими из торца световода (напомним, что его диаметр считается пренебрежимо малым). Для этих лучей $\sin\varphi = 1/n$. С другой стороны, по закону Снеллиуса $\sin\gamma = n\sin\alpha$. Отсюда, учитывая, что $\cos\alpha = \sin\varphi = 1/n$, получим

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n} \quad \Rightarrow \quad \sin\gamma = n\sin\alpha = \sqrt{n^2-1} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 30^\circ.$$

Найдём теперь диаметр светового пятна:

$$D = 2L\,\mathrm{tg}\,\gamma = \frac{2L}{\sqrt{3}} \approx 8{,}1 \text{ см}.$$

Задача 5. (20 баллов)
Легковая машина движется по горизонтальному шоссе за грузовиком. В протекторе заднего колеса грузовика застрял камень. На каком минимальном расстоянии s от грузовика может ехать легковая машина, чтобы камень, вырвавшийся из колеса грузовика, не долетел до неё? Машины движутся со скоростью $v = 90$ км/ч. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

Ответ: 62,5 м.

Решение: Перейдём в систему отсчёта, связанную с движущимися машинами. Относительно неё камень, застрявший в колесе, вылетает со скоростью $v = 90$ км/ч $= 25$ м/с, равной линейной скорости вращения обода колеса. Вылетевший камень пролетит расстояние $L = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$, где α — угол, под которым направлена его начальная скорость. Так как угол α может быть любым, минимальное безопасное расстояние s равно максимально возможному значению L, которое получается при $\alpha = 45^\circ$, то есть

$$s = \frac{v^2 \sin(2 \cdot 45^\circ)}{g} = \frac{v^2}{g} = 62{,}5 \text{ м}.$$