Ответы и возможные решения

Вариант 1

$\boxed{\textbf{Б 1}}$ **Ответ:** 2υ.

Решение: Пусть s — длина пройденной велосипедистом дистанции, t — полное время в пути. Тогда

$$s = \upsilon_{\text{ср}} t = \upsilon t\,. \tag{1.1}$$

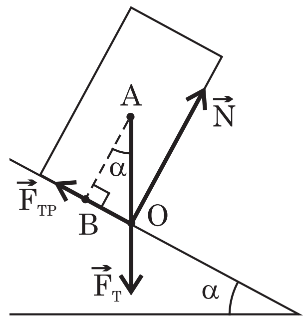
Первую треть дистанции Василий проехал за время $t_1 = s/(3\upsilon)$. Скорость велосипедиста на второй части дистанции была на треть меньше ($\upsilon_2 = 2\upsilon/3$), поэтому время, затраченное на её прохождение равно $t_2 = s/(3\upsilon_2) = s/(2\upsilon)$. Оставшуюся треть пути Василий проехал за время $t_3 = s/(3\upsilon_3)$, где υ_3 — искомая скорость велосипедиста на финише. Таким образом, полное время в пути равно

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{s}{3\upsilon} + \frac{s}{2\upsilon} + \frac{s}{3\upsilon_3} = \frac{5s}{6\upsilon} + \frac{s}{3\upsilon_3}\,. \tag{1.2}$$

Отсюда

$$s = \upsilon t = \frac{5s}{6} + \frac{s\upsilon}{3\upsilon_3} \quad \Rightarrow \quad \frac{s}{6} = \frac{s\upsilon}{3\upsilon_3} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_3 = 2\upsilon\,. \tag{1.3}$$

$\boxed{\textbf{Б 2}}$ **Ответ:** $\mathrm{arctg}\,\dfrac{2r}{H}$.



Решение: На цилиндр действуют сила тяжести $\vec{F}_т$, приложенная в его геометрическом центре (точка A), сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$, препятствующая скольжению цилиндра вниз по плоскости. Так как цилиндр находится в равновесии, сумма моментов всех сил относительно точки O должна быть равна нулю.

В предельном случае, когда угол α максимален, сила реакции и сила трения оказываются приложенными в точке O. Поэтому плечо силы тяжести должно быть нулевым, то есть сила тяжести должна быть направлена вдоль прямой AO (см. рисунок). Так как $\angle OAB = \alpha$, $OB = r$, $AB = H/2$, находим, что в предельном случае

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{OB}{AB} = \frac{2r}{H}\,, \tag{2.1}$$

откуда $\alpha = \mathrm{arctg}(2r/H)$.

$\boxed{\textbf{Б 3}}$ **Ответ:** 17,2%.

Решение: Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для водяного пара

$$pV = \frac{m_п}{M}RT\,. \tag{3.1}$$

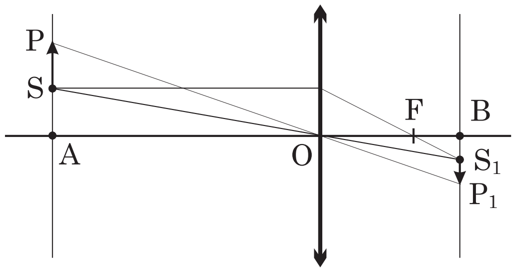
Здесь p — парциальное давление насыщенного водяного пара, $m_п$ и T — его масса и температура (в кельвинах), V — объём сосуда, а M — молярная масса воды. Найдём отсюда массу пара

$$m_п = \frac{MpV}{RT} \approx 0{,}1722 \text{ г}\,. \tag{3.2}$$

От начальной массы воды она составляет

$$\eta = \frac{m_п}{m} \cdot 100\% \approx 17{,}2\%\,. \tag{3.3}$$

$\boxed{\text{Б 4}}$ **Ответ:** $\dfrac{\upsilon}{3}$.



Решение: Если источник S движется в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси, то его изображение S_1 будет также двигаться в плоскости, перпендикулярной этой оси. Обозначим точки пересечения этих плоскостей с главной оптической осью буквами A и B. По условию задачи AO = 4f, откуда, используя формулу тонкой линзы, получаем

$$\frac{1}{AO} + \frac{1}{BO} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad BO = \frac{4f}{3}\,. \tag{4.1}$$

Найдём теперь скорость движения точки S_1. Пусть за время t источник переместится в точку P ($SP = \upsilon t$), тогда изображение попадёт в точку P_1. Так как треугольники SPO и S_1P_1O подобны,

$$\frac{S_1P_1}{SP} = \frac{BO}{AO} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad S_1P_1 = \frac{1}{3}\upsilon t\,. \tag{4.2}$$

Отсюда следует, что изображение движется с постоянной скоростью $\upsilon/3$.

$\boxed{\text{Б 5}}$ **Ответ:** $11P_1V_1$.

Решение: Количество теплоты, необходимой для перевода идеального газа из состояния 1 в состояние 3, можно найти, используя первое начало термодинамики: $Q = \Delta U + A$. Изменение внутренней энергии газа равно

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_1) = \frac{3}{2}(P_3V_3 - P_1V_1) = \frac{3}{2}(6P_1V_1 - P_1V_1) = \frac{15}{2}P_1V_1\,. \tag{5.1}$$

Работу газа в данном процессе можно найти, как площадь под графиком процесса в координатах (P,V):

$$A = S_{\text{трап}} + S_{\text{прям}} = \frac{1}{2}(P_1 + 2P_1)V_1 + 2P_1 \cdot V_1 = \frac{7}{2}P_1V_1\,. \tag{5.2}$$

Отсюда $Q = \Delta U + A = 11P_1V_1$.

$\boxed{\text{Б 6}}$ **Ответ:** $\dfrac{S(H_0T - HT_0)}{T - T_0}$.

Решение: Пусть $V_{\text{п}}$ — суммарный объём всех песчинок. Тогда начальный объём воздуха в сосуде равен $V_0 = SH_0 - V_{\text{п}}$, конечный объём — $V = SH - V_{\text{п}}$. Запишем закон Гей-Люссака:

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{V}{T} \quad \Rightarrow \quad \frac{SH_0 - V_{\text{п}}}{T_0} = \frac{SH - V_{\text{п}}}{T}\,. \tag{6.1}$$

Выражая отсюда величину $V_{\text{п}}$, получаем

$$V_{\text{п}} = \frac{S(H_0T - HT_0)}{T - T_0}\,. \tag{6.2}$$

$\boxed{\textbf{Б 7}}$ **Ответ:** $\dfrac{CU^2}{3} = 2 \cdot 10^{-9}$ Дж.

Решение: Начальная ёмкость плоского воздушного конденсатора равна $C = \varepsilon_0 S/d$, где S — площадь поверхности пластин, а d — начальное расстояние между пластинами. Если это расстояние увеличить в три раза, ёмкость конденсатора станет равна

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{3d} = \frac{C}{3}\,. \tag{7.1}$$

При начальном положении пластин заряд конденсатора — $q = CU$, в конечном — $q_1 = CU/3$. Работу по увеличению расстояния между пластинами можно найти как сумму изменения энергии конденсатора $\Delta W = W_{кон} - W_{нач}$ и работы по перемещению заряда против внутренних сил источника $A_{пр.ист.} = -\Delta q U = (q - q_1)U$

$$A = \Delta W + A_{пр.ист.}\,. \tag{7.2}$$

Найдём изменение энергии конденсатора. Начальная энергия равна $W_{нач} = CU^2/2$, энергию в конечном состоянии можно записать как $W_{кон} = C_1U^2/2 = CU^2/6$. Тогда

$$\Delta W = W_{кон} - W_{нач} = -\frac{CU^2}{3}\,. \tag{7.3}$$

Работа по перемещению заряда против внутренних сил источника равна $A_{пр.ист.} = 2CU^2/3$. Отсюда получаем значение работы по перемещению пластин конденсатора

$$A = \frac{CU^2}{3} = 2 \cdot 10^{-9}\ \text{Дж}\,. \tag{7.4}$$

Примечание: Решение, использующее формулу $A = W_{нач} - W_{кон}$ и дающее, формально, тот же ответ, с физической точки зрения абсолютно неверно.

$\boxed{\textbf{Б 8}}$ **Ответ:** $\dfrac{2\mathscr{E}}{I_2} - \dfrac{\mathscr{E}}{I_1} = 2$ Ом.

Решение: Пусть ρ — удельное сопротивление опилок, S — площадь боковых стенок сосуда, а L — его ширина. Тогда сопротивление полного сосуда опилок равно $R = \rho L/S$. Сопротивление же сосуда, засыпанного наполовину, в два раза больше:

$$R_{пол} = \frac{\rho L}{S/2} = 2\frac{\rho L}{S} = 2R\,. \tag{8.1}$$

Запишем закон Ома для полной цепи в первом эксперименте:

$$\mathscr{E} = I_1(2R + r)\,. \tag{8.2}$$

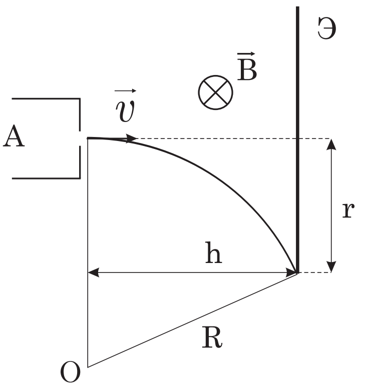
Здесь r — внутреннее сопротивление источника. Для второго случая закон Ома имеет вид

$$\mathscr{E} = I_2(R + r)\,. \tag{8.3}$$

Исключая из полученных уравнений величину R и подставляя численные значения, получим, что внутреннее сопротивление источника равно

$$r = \frac{2\mathscr{E}}{I_2} - \frac{\mathscr{E}}{I_1} = 2\ \text{Ом}. \tag{8.4}$$

$\boxed{\textbf{Б 9}}$ **Ответ:** $\upsilon = \dfrac{E_0}{B_0}\left(1 + \dfrac{r^2}{h^2}\right)^{-1}$.



Решение: Рассмотрим первую ситуацию, когда вдоль поверхности экрана приложено однородное электрическое поле E_0. В этом случае проекция скорости электрона на ось, перпендикулярную экрану, остаётся постоянной и равной начальной скорости υ. Проекция скорости на ось, направленную параллельно вектору напряжённости электрического поля, меняется со временем линейно. Пусть электрон достиг экрана за время t. Тогда

$$h = \upsilon t\,, \qquad r = \frac{qE_0\,t^2}{2m}\,, \tag{9.1}$$

где q — абсолютная величина заряда электрона, а m — его масса. Отсюда, выразив t, найдём, что

$$\frac{q}{m} = \frac{2r\upsilon^2}{E_0 h^2}\,. \tag{9.2}$$

Во втором случае электрон под действием однородного магнитного поля B_0 движется с постоянной по модулю скоростью вдоль дуги окружности с центром в точке O (см. рисунок). Радиус этой окружности можно найти, приравняв центростремительное ускорение отношению величины силы Лоренца к массе электрона

$$a_{\text{ц.с.}} = \frac{F_{\text{л}}}{m} \quad\Rightarrow\quad \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{q\upsilon B_0}{m} \quad\Rightarrow\quad R = \frac{m\upsilon}{qB_0}\,. \tag{9.3}$$

С другой стороны, по теореме Пифагора

$$(R-r)^2 + h^2 = R^2 \quad\Rightarrow\quad R^2 - 2Rr + r^2 + h^2 = R^2 \quad\Rightarrow\quad R = \frac{r^2+h^2}{2r}\,. \tag{9.4}$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{m\upsilon}{qB_0} = \frac{r^2+h^2}{2r} \quad\Rightarrow\quad \frac{q}{m} = \frac{2r\upsilon}{B_0(r^2+h^2)}\,. \tag{9.5}$$

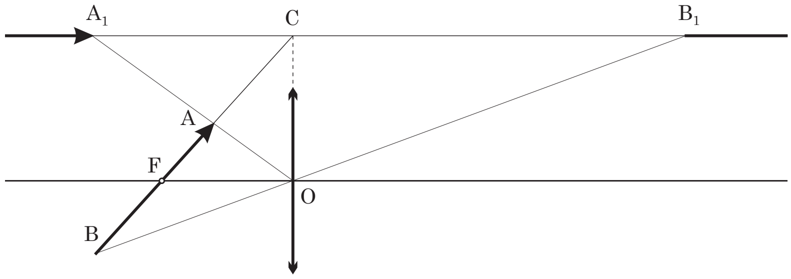
Наконец, приравнивая правые части уравнений (9.2) и (9.5), находим выражение для скорости υ:

$$\frac{2r\upsilon^2}{E_0h^2} = \frac{2r\upsilon}{B_0(r^2+h^2)} \quad\Rightarrow\quad \upsilon = \frac{E_0}{B_0}\left(1+\frac{r^2}{h^2}\right)^{-1}\,. \tag{9.6}$$

$\boxed{\textbf{Б 10}}$ **Решение:** Пустим луч, проходящий через стрелку AB. Так как он проходит через фокус линзы F, то после преломления в линзе он будет идти параллельно главной оптической оси. Поскольку одна часть стрелки (отрезок AF) расположена перед фокусом, а другая за ним, изображение будет состоять из двух частей: мнимое изображение отрезка AF и действительное изображение отрезка BF, лежащие на одной прямой, параллельной главной оптической оси (прямая A_1B_1 на рисунке).

Для того, чтобы построить изображения концов стрелки, пустим лучи AO и BO, проходящие через центр линзы O. Точки пересечения этих лучей (или их продолжений) с описанной выше прямой обозначим A_1 и B_1. Это и будут искомые изображения концов стрелки.

Так как изображение точки F находится на бесконечности, то изображение всей стрелки будет представлять из себя два луча, параллельных главной оптической оси (см. рисунок).



Вариант 2

Б 1 **Ответ:** 2υ.

Решение: Пусть s — длина пройденной велосипедистом дистанции, t — полное время в пути. Тогда

$$s = \upsilon_{ср}t = \upsilon t\,. \tag{1.1}$$

Первую треть дистанции Василий проехал за время $t_1 = s/(3\upsilon)$. Скорость велосипедиста на второй части дистанции была на треть меньше ($\upsilon_2 = 2\upsilon/3$), поэтому время, затраченное на её прохождение равно $t_2 = s/(3\upsilon_2) = s/(2\upsilon)$. Оставшуюся треть пути Василий проехал за время $t_3 = s/(3\upsilon_3)$, где υ_3 — искомая скорость велосипедиста на финише. Таким образом, полное время в пути равно

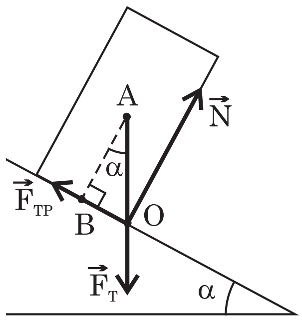
$$t = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{s}{3\upsilon} + \frac{s}{2\upsilon} + \frac{s}{3\upsilon_3} = \frac{5s}{6\upsilon} + \frac{s}{3\upsilon_3}\,. \tag{1.2}$$

Отсюда

$$s = \upsilon t = \frac{5s}{6} + \frac{s\upsilon}{3\upsilon_3} \quad \Rightarrow \quad \frac{s}{6} = \frac{s\upsilon}{3\upsilon_3} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_3 = 2\upsilon\,. \tag{1.3}$$

Б 2 **Ответ:** $2r\,\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Решение: На цилиндр действуют сила тяжести $\vec{F}_т$, приложенная в его геометрическом центре (точка A), сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$, препятствующая скольжению цилиндра вниз по плоскости. Так как цилиндр находится в равновесии, сумма моментов всех сил относительно точки O должна быть равна нулю.



В предельном случае, когда угол α максимален, сила реакции и сила трения оказываются приложенными в точке O. Поэтому плечо силы тяжести должно быть нулевым, то есть сила тяжести должна быть направлена вдоль прямой AO (см. рисунок). Так как $\angle OAB = \alpha$, $OB = r$, $AB = H/2$, находим, что в предельном случае

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{OB}{AB} = \frac{2r}{H}\,, \tag{2.1}$$

откуда $H = 2r\,\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Б 3 **Ответ:** 25,7%.

Решение: Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для водяного пара

$$pV = \frac{m_п}{M}RT\,. \tag{3.1}$$

Здесь p — парциальное давление насыщенного водяного пара, $m_п$ и T — его масса и температура (в кельвинах), V — объём сосуда, а M — молярная масса воды. Найдём отсюда массу пара

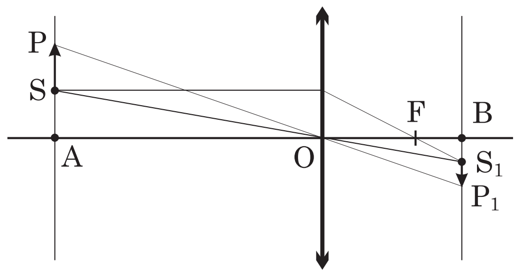
$$m_п = \frac{MpV}{RT} \approx 0{,}1286 \text{ г}\,. \tag{3.2}$$

От начальной массы воды она составляет

$$\eta = \frac{m_п}{m} \cdot 100\% \approx 25{,}7\%\,. \tag{3.3}$$

$\boxed{\text{Б 4}}$ **Ответ:** $\frac{\upsilon}{5}$.

Решение: Если источник S движется в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси, то его изображение S_1 будет также двигаться в плоскости, перпендикулярной этой оси. Обозначим точки пересечения этих плоскостей с главной оптической осью буквами A и B. По условию задачи AO = 6f, откуда, используя формулу тонкой линзы, получаем



$$\frac{1}{AO} + \frac{1}{BO} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad BO = \frac{6f}{5}\,. \tag{4.1}$$

Найдём теперь скорость движения точки S_1. Пусть за время t источник переместится в точку P ($SP = \upsilon t$), тогда изображение попадёт в точку P_1. Так как треугольники SPO и S_1P_1O подобны,

$$\frac{S_1P_1}{SP} = \frac{BO}{AO} = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad S_1P_1 = \frac{1}{5}\upsilon t\,. \tag{4.2}$$

Отсюда следует, что изображение движется с постоянной скоростью $\upsilon/5$.

$\boxed{\text{Б 5}}$ **Ответ:** $16P_1V_1$.

Решение: Количество теплоты, необходимой для перевода идеального газа из состояния 1 в состояние 3, можно найти, используя первое начало термодинамики: $Q = \Delta U + A$. Изменение внутренней энергии газа равно

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_1) = \frac{3}{2}(P_3V_3 - P_1V_1) = \frac{3}{2}(8P_1V_1 - P_1V_1) = \frac{21}{2}P_1V_1\,. \tag{5.1}$$

Работу газа в данном процессе можно найти, как площадь под графиком процесса в координатах (P,V):

$$A = S_{трап} + S_{прям} = \frac{1}{2}(P_1 + 2P_1)V_1 + 2P_1 \cdot 2V_1 = \frac{11}{2}P_1V_1\,. \tag{5.2}$$

Отсюда $Q = \Delta U + A = 16P_1V_1$.

$\boxed{\text{Б 6}}$ **Ответ:** $\dfrac{S(H_0T - HT_0)}{T - T_0}$.

Решение: Пусть $V_п$ — суммарный объём всех песчинок. Тогда начальный объём воздуха в сосуде равен $V_0 = SH_0 - V_п$, конечный объём — $V = SH - V_п$. Запишем закон Гей-Люссака:

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{V}{T} \quad \Rightarrow \quad \frac{SH_0 - V_п}{T_0} = \frac{SH - V_п}{T}\,. \tag{6.1}$$

Выражая отсюда величину $V_п$, получаем

$$V_п = \frac{S(H_0T - HT_0)}{T - T_0}\,. \tag{6.2}$$

$\boxed{\text{Б 7}}$ **Ответ:** $\dfrac{CU^2}{3} = 8{,}3 \cdot 10^{-10}$ Дж.

Решение: Начальная ёмкость плоского воздушного конденсатора равна $C = \varepsilon_0 S/d$, где S — площадь поверхности пластин, а d — начальное расстояние между пластинами. Если это расстояние увеличить в три раза, ёмкость конденсатора станет равна

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{3d} = \frac{C}{3}\,. \tag{7.1}$$

При начальном положении пластин заряд конденсатора — $q = CU$, в конечном — $q_1 = CU/3$. Работу по увеличению расстояния между пластинами можно найти как сумму изменения энергии конденсатора $\Delta W = W_{кон} - W_{нач}$ и работы по перемещению заряда против внутренних сил источника $A_{пр.ист.} = -\Delta qU = (q - q_1)U$

$$A = \Delta W + A_{пр.ист.}\,. \tag{7.2}$$

Найдём изменение энергии конденсатора. Начальная энергия равна $W_{нач} = CU^2/2$, энергию в конечном состоянии можно записать как $W_{кон} = C_1U^2/2 = CU^2/6$. Тогда

$$\Delta W = W_{кон} - W_{нач} = -\frac{CU^2}{3}\,. \tag{7.3}$$

Работа по перемещению заряда против внутренних сил источника равна $A_{пр.ист.} = 2CU^2/3$. Отсюда получаем значение работы по перемещению пластин конденсатора

$$A = \frac{CU^2}{3} = 8{,}3 \cdot 10^{-10}\ \text{Дж}\,. \tag{7.4}$$

Примечание: Решение, использующее формулу $A = W_{нач} - W_{кон}$ и дающее, формально, тот же ответ, с физической точки зрения абсолютно неверно.

$\boxed{\text{Б 8}}$ **Ответ:** $\dfrac{2\mathscr{E}}{I_2} - \dfrac{\mathscr{E}}{I_1} = 2{,}1$ Ом.

Решение: Пусть ρ — удельное сопротивление опилок, S — площадь боковых стенок сосуда, а L — его ширина. Тогда сопротивление полного сосуда опилок равно $R = \rho L/S$. Сопротивление же сосуда, засыпанного наполовину, в два раза больше:

$$R_{пол} = \frac{\rho L}{S/2} = 2\frac{\rho L}{S} = 2R\,. \tag{8.1}$$

Запишем закон Ома для полной цепи в первом эксперименте:

$$\mathscr{E} = I_1(2R + r)\,. \tag{8.2}$$

Здесь r — внутреннее сопротивление источника. Для второго случая закон Ома имеет вид

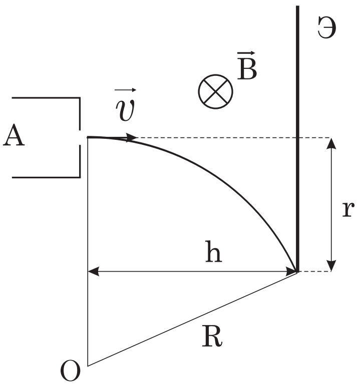
$$\mathscr{E} = I_2(R + r)\,. \tag{8.3}$$

Исключая из полученных уравнений величину R и подставляя численные значения, получим, что внутреннее сопротивление источника равно

$$r = \frac{2\mathscr{E}}{I_2} - \frac{\mathscr{E}}{I_1} \approx 2{,}1 \text{ Ом}. \tag{8.4}$$

$\boxed{\textbf{Б 9}}$ **Ответ:** $\upsilon = \dfrac{E_0}{B_0}\left(1 + \dfrac{r^2}{h^2}\right)^{-1}$.

Решение: Рассмотрим первую ситуацию, когда вдоль поверхности экрана приложено однородное электрическое поле E_0. В этом случае проекция скорости электрона на ось, перпендикулярную экрану, остаётся постоянной и равной начальной скорости υ. Проекция скорости на ось, направленную параллельно вектору напряжённости электрического поля, меняется со временем линейно. Пусть электрон достиг экрана за время t. Тогда



$$h = \upsilon t\,, \qquad r = \frac{qE_0\,t^2}{2m}\,, \tag{9.1}$$

где q — абсолютная величина заряда электрона, а m — его масса. Отсюда, выразив t, найдём, что

$$\frac{q}{m} = \frac{2r\upsilon^2}{E_0 h^2}\,. \tag{9.2}$$

Во втором случае электрон под действием однородного магнитного поля B_0 движется с постоянной по модулю скоростью вдоль дуги окружности с центром в точке O (см. рисунок). Радиус этой окружности можно найти, приравняв центростремительное ускорение отношению величины силы Лоренца к массе электрона

$$a_{\text{ц.с.}} = \frac{F_{\text{л}}}{m} \quad\Rightarrow\quad \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{q\upsilon B_0}{m} \quad\Rightarrow\quad R = \frac{m\upsilon}{qB_0}\,. \tag{9.3}$$

С другой стороны, по теореме Пифагора

$$(R - r)^2 + h^2 = R^2 \quad\Rightarrow\quad R^2 - 2Rr + r^2 + h^2 = R^2 \quad\Rightarrow\quad R = \frac{r^2 + h^2}{2r}\,. \tag{9.4}$$

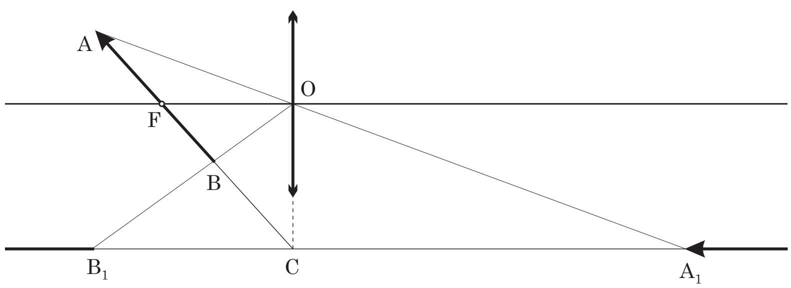
Отсюда получаем, что

$$\frac{m\upsilon}{qB_0} = \frac{r^2 + h^2}{2r} \quad\Rightarrow\quad \frac{q}{m} = \frac{2r\upsilon}{B_0(r^2 + h^2)}\,. \tag{9.5}$$

Наконец, приравнивая правые части уравнений (9.2) и (9.5), находим выражение для скорости υ:

$$\frac{2r\upsilon^2}{E_0 h^2} = \frac{2r\upsilon}{B_0(r^2+h^2)} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \frac{E_0}{B_0}\left(1+\frac{r^2}{h^2}\right)^{-1}. \tag{9.6}$$

$\boxed{\textbf{Б 10}}$ **Решение:** Пустим луч, проходящий через стрелку AB. Так как он проходит через фокус линзы F, то после преломления в линзе он будет идти параллельно главной оптической оси. Поскольку одна часть стрелки (отрезок BF) расположена перед фокусом, а другая за ним, изображение будет состоять из двух частей: мнимое изображение отрезка BF и действительное изображение отрезка AF, лежащие на одной прямой, параллельной главной оптической оси (прямая A_1B_1 на рисунке).



Для того, чтобы построить изображения концов стрелки, пустим лучи AO и BO, проходящие через центр линзы O. Точки пересечения этих лучей (или их продолжений) с описанной выше прямой обозначим A_1 и B_1. Это и будут искомые изображения концов стрелки.
Так как изображение точки F находится на бесконечности, то изображение всей стрелки будет представлять из себя два луча, параллельных главной оптической оси (см. рисунок).