

**Межрегиональная предметная олимпиада Казанского федерального университета
по предмету «Математика»**

2013–2014 учебный год

11 класс

1. (25 б.) Известно, что $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = a$ и $\alpha \in (0, \pi/2)$. Найти $\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}$.
2. (25 б.) В окружности ω проведен диаметр AB и на этом диаметре зафиксирована точка X . Точка P лежит на окружности ω и не совпадает с точками A и B . Докажите, что отношение

$$\frac{\operatorname{tg} \angle APX}{\operatorname{tg} \angle PAX}$$

не зависит от выбора точки P .

3. (25 б.) Решите уравнение

$$2(x - 6) = \frac{x^2}{(1 + \sqrt{x + 1})^2}.$$

4. (25 б.) Известно, что a – нечетное целое число, а x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + ax - 1 = 0$. Доказать, что при любом целом $n \geq 0$ числа $x_1^n + x_2^n$ и $x_1^{n+1} + x_2^{n+1}$ – целые и взаимно простые.