Межрегиональная предметная олимпиада Казанского федерального университета по предмету «Математика» 2013-2014 учебный год

11 класс. Краткие решения.

1. Известно, что $tg\ \alpha + ctg\ \alpha = a$и $\alpha \in (0, \pi/2)$.Найти $\frac{1}{\sin\ \alpha} + \frac{1}{\cos\ \alpha}$.

Решение.$\frac{\sin\ \alpha}{\cos\ \alpha} + \frac{\cos\ \alpha}{\sin\ \alpha} = a \Rightarrow \frac{1}{\sin\ \alpha \cos\ \alpha} = a \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{2}{a}$. Далее, $\frac{1}{\sin\ \alpha} + \frac{1}{\cos\ \alpha} = \frac{\sin\ \alpha + \cos\ \alpha}{\sin\ \alpha \cos\ \alpha}$;$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha = \frac{a+2}{a} \Rightarrow \frac{1}{\sin\ \alpha} + \frac{1}{\cos\ \alpha} = a\sqrt{\frac{a+2}{a}} = \sqrt{a^2 + 2a}$

2. В окружности ωпроведен диаметр AB и на этом диаметре зафиксирована точка X. Точка P лежит на окружности ωи не совпадает с точками Aи B. Докажите, что отношение

$$\frac{tg\ \angle APX}{tg\ \angle PAX}$$

не зависит от выбора точки P.

Решение.Проведем перпендикуляр XHиз точки X на отрезке AP. Заметим, что $\angle BPA = 90°$, так как он опирается на диаметр. Отсюда следует, что точка H лежит внутри отрезка AP и что $XH \parallel BP$. Далее,

$$\frac{tg\ \angle APX}{tg\ \angle PAX} = \frac{XH: HP}{XH: HA} = \frac{HA}{HP} = \frac{AX}{XB}.$$

Последнее равенство следует из теоремы Фалеса ($XH \parallel BP$). Но отношение AX/XB не зависит от выбора точки P, так как определяется лишь точкой X.

3. Решите уравнение

$$2(x-6) = \frac{x^2}{\left(1+\sqrt{x+1}\right)^2}.$$

Решение 1.Перепишем уравнение в виде $2(x-6)\left(1+\sqrt{x+1}\right)^2 = x^2$и сделаем замену $\sqrt{x+1} = y$. Тогда $x = y^2 - 1$и$y \geq 0$. После замены получим $2(y^2-7)(y+1)^2 = (y^2-1)^2$. Разложим правую часть на множители $(y+1)^2(y-1)^2$, перенес влево и вынесем $(y+1)^2$за скобки. Получим $(y+1)^2(2y^2 - 14 - (y-1)^2) = (y+1)^2(y^2 + 2y - 15) = (y+1)^2(y-3)(y+5) = 0$.У этого уравнения есть три решения $y_1 = 3$,$y_2 = -1$, $y_3 = -5$. Последние два не удовлетворяют условию $y \geq 0$, следовательно, являются посторонними. Если $y = 3$, то $x = 8$. Очевидно, этот ответ подходит.

Решение 2.Преобразуем уравнение к виду

$$2(x-6)\left(x+2+2\sqrt{x+1}\right) - x^2 = 0$$

и обозначим выражение в левой части за $f(x)$.Имеем

$$f(x) = 2x^2 - 8x - 24 + 4(x-6)\sqrt{x+1} - x^2 = x^2 - 8x - 24 + 4(x-6)\sqrt{x+1}.$$

Нам требуется решить уравнение $f(x) = 0$.Ясно, что все корни этого уравнения удовлетворяют условию $x > 6$ (иначе левая часть исходного уравнения неположительна, а правая – положительна). Найдем производную $f'(x)$:

$$f'(x) = (2x-8) + 4\sqrt{x+1} + \frac{2(x-6)}{\sqrt{x+1}}.$$

Ясно, что при $x > 6$ каждое слагаемое в последней сумме неотрицательно. Отсюда следует, что функция $f(x)$ возрастает на интервале $(6, +\infty)$. Поэтому уравнение $f(x) = 0$может иметь не больше одного решения. Одно решение $x = 8$ легко найти подбором.

4. Известно, что a– нечетное целое число, а x_1и x_2–корни уравнения $x^2 + ax - 1 = 0$. Доказать, что при любом целом $n \geq 0$числа$x_1^n + x_2^n$и$x_1^{n+1} + x_2^{n+1}$–целые и взаимно простые.

Решение.Введем обозначение $x_1^n + x_2^n = A_n$.При $n = 0$ имеем: $A_0 = 2, A_1 = -a$–целые и взаимно простые числа. Далее, по теореме Виета, $x_1 + x_2 = -a, x_1 x_2 = -1$.Отсюда $-aA_n = (x_1 + x_2)(x_1^n + x_2^n) = x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + x_2 x_1^n + x_1 x_2^n = A_{n+1} + x_1 x_2 A_{n-1}$.Следовательно, $A_{n+1} = -A_{n-1} - aA_n$ –целое число, если A_{n-1}и aA_n– целые. Покажем, что все числа $A_0, A_1, A_2, \ldots$– взаимно простые. Предположим, что A_{n+1}иA_nимеют общий ненулевой множитель m. Тогда это же число m должно быть и общим множителем чисел A_{n-1} и A_nи так далее. Но числа A_0иA_1 взаимно просты.