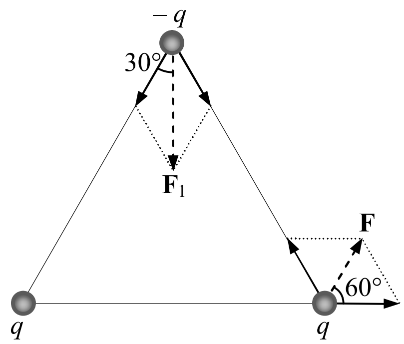
11 класс

1. В вершинах равностороннего треугольника закреплены точечные заряды q, q, $-q$. Величина силы, действующей на один из зарядов q со стороны двух других, равна F. Чему равна сила, действующая на заряд $-q$ со стороны двух других зарядов?

Решение.



Силы, действующие на один из зарядов $+q$ и на заряд $-q$, показаны стрелками на рисунке. Модули f этих сил одинаковы, т.к. расстояния и модули зарядов равны.

Равнодействующие **F** и $\mathbf{F}_1$ этих сил показаны пунктирами. Как видно из рисунка, силы, действующие на заряд $+q$ со стороны двух других, и их равнодействующая **F** образуют равносторонний треугольник, поэтому

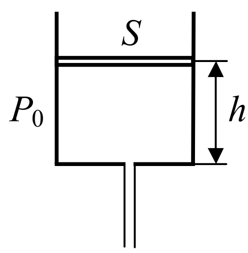
$$F=f. \qquad \textbf{(4 б.)}$$

Силы, действующие на заряд $-q$ со стороны двух других, и их равнодействующая $\mathbf{F}_1$ образуют равнобедренный треугольник с углом при основании 30°, поэтому

$$F_1 = 2f\cos\left(30^\circ\right) = \sqrt{3}f\,. \qquad \textbf{(4 б.)}$$

Сравнив полученные выражения, найдём

ответ: $F_1 = \sqrt{3}F\,.$ **(2 б.)**



2. Закрытый легким подвижным поршнем площади S сосуд первоначально был откачан и поршень лежал на дне. После того, как в него по трубке медленно напустили ν молей газа, поршень поднялся до высоты h, а когда после этого из него откачали ν_1 молей, он опустился до $h/2$. Определите силу трения между поршнем и цилиндром. Атмосферное давление равно P_0, температура постоянна.

Решение.

Уравнения состояний газа после напуска ν молей и после откачки ν_1 молей газа имеют следующий вид

$$P\cdot\left(hS\right) = \nu RT\,, \qquad (1) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

$$P_1\cdot\left(\frac{h}{2}S\right) = \left(\nu-\nu_1\right)RT\,, \qquad (2) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

где T — постоянная температура газа, $\left(hS\right)$ и $\left(\frac{h}{2}S\right)$ — объёмы газа,

P и P_1 — давления газа в этих состояниях.

В обоих состояниях на поршень действуют противоположно направленные сила атмосферного давления $\left(P_0 S\right)$ и сила давления газа (PS или P_1S), а также сила трения $F_{\text{тр}}$, которая при движении поршня вверх (напуск газа) направлена вниз, а при движении поршня вниз (откачка) направлена вверх. Запишем баланс этих сил в двух рассматриваемых состояниях:

$$PS - P_0 S - F_{\text{тр}} = 0, \qquad (3) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

$$P_1 S - P_0 S + F_{\text{тр}} = 0. \qquad (4) \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Разделив (1) на (2), получим

$$\frac{P}{P_1} = \frac{\nu}{2\left(\nu - \nu_1\right)}. \qquad (5)$$

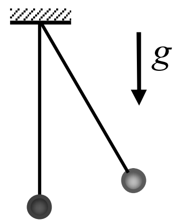
Выразив P и P_1 из (3) и (4), соответственно, и подставив их в (5), получим

$$\frac{P_0 S + F_{\text{тр}}}{P_0 S - F_{\text{тр}}} = \frac{\nu}{2\left(\nu - \nu_1\right)}.$$

Выразив отсюда $F_{\text{тр}}$, найдём

ответ: $$F_{\text{тр}} = P_0 S \frac{2\nu_1 - \nu}{3\nu - 2\nu_1}. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

3. Два маленьких шарика одинакового размера, но разной массы, подвешены на одинаковых невесомых нерастяжимых нитях, закрепленных в одной точке. Более тяжелый шарик находился в покое, а более легкий отклонили от вертикали и отпустили. При каком отношении масс шариков они после упругого соударения поднимутся на одинаковую высоту? Сопротивлением воздуха пренебречь.



Решение.

Высота подъёма h каждого шарика связана с его скоростью v в нижней точке после удара законом сохранения энергии: $\dfrac{mv^2}{2} = mgh$.

Поскольку высоты h для обоих шариков равны (по условию), то и скорости шариков после удара одинаковы. **(4 б.)**

Пусть M и m — массы тяжёлого и лёгкого шариков, соответственно, u — скорость лёгкого шарика в нижней точке перед ударом, v — скорости шариков (одинаковые) сразу после удара.

Запишем закон сохранения энергии и импульса для удара:

$$\frac{mu^2}{2}=\frac{Mv^2}{2}+\frac{mv^2}{2}, \qquad \textbf{(2 б.)}$$

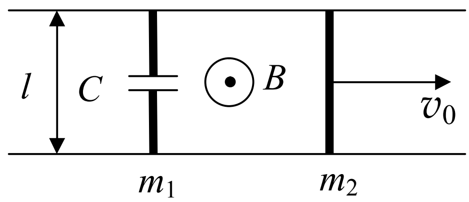
$$mu=Mv-mv. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Возведём второе уравнение в квадрат и разделим на первое, получим

$$m=\frac{(M-m)^2}{M+m} \qquad \text{или} \qquad 1=\frac{\left(\frac{M}{m}-1\right)^2}{\frac{M}{m}+1}.$$

Отсюда найдём

$$\textbf{ответ:} \quad \frac{M}{m}=3. \qquad \textbf{(2 б.)}$$



4. Два длинных рельса расположены в горизонтальной плоскости параллельно друг другу на расстоянии l. Перпендикулярно плоскости создано однородное магнитное поле индукции B. На рельсах далеко друг от друга покоятся две перемычки массой m_1 и m_2, сделанные из проводников с некоторым конечным сопротивлением. В середину первой перемычки вставлен незаряженный конденсатор емкости C. Второй перемычке ударом сообщают скорость v_0 вдоль рельсов. Какую скорость v_1 будет иметь первая перемычка в установившемся режиме их движения? Трения нет.

Решение.

При движении перемычек по замыкаемой ими цепи течёт ток электромагнитной индукции I, который заряжает конденсатор: $I=\Delta q/\Delta t$, где q — заряд конденсатора. При этом сила Ампера, действующая на перемычку с конденсатором, равна $IBl=(\Delta q/\Delta t)Bl$. Запишем второй закон Ньютона для этой перемычки:

$$\frac{\Delta q}{\Delta t}Bl=m_1\frac{\Delta v}{\Delta t},$$

где v — текущая скорость этой перемычки. Отсюда следует, что приращения Δq и Δv связаны соотношением $\frac{\Delta q}{\Delta v}=\frac{m_1}{Bl}$. Поскольку начальные значения q и v равны нулю, то конечные их значения (Q и v_1) связаны таким же соотношением:

$$\frac{Q}{v_1}=\frac{m_1}{Bl}. \qquad (1) \qquad \textbf{(3 б.)}$$

Такой же ток I, но направленный в противоположную сторону, течёт по правой перемычке, поэтому сила Ампера, действующая на неё, равна по модулю и противоположна по знаку силе Ампера, действующей на первую перемычку. Таким образом, равнодействующая сил, действующих на систему двух перемычек, равна нулю. Значит, импульс этой системы сохраняется:

$$m_2 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2, \qquad (2) \qquad \textbf{(3 б.)}$$

где v_2 — установившаяся скорость правой перемычки.

В установившемся режиме, когда скорости перемычек уже не меняются, силы Ампера должны быть равны нулю, а значит, и ток в цепи равен нулю. Отсюда следует, что напряжение на конденсаторе Q/C и ЭДС индукции $-\Delta\Phi/\Delta t$ в сумме равны нулю:

$$\frac{Q}{C} - \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 0. \qquad (3)$$

Поток через контур, замыкаемый перемычками, равен $\Phi = Blx$, где x — расстояние между ними. Поэтому изменение потока $\Delta\Phi$ связано с изменением расстояния Δx: $\Delta\Phi = Bl\Delta x$. Учитывая, что $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v_2 - v_1$, получим $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = Bl\left(v_2 - v_1\right)$. Подставив это в (3), получим

$$\frac{Q}{C} - Bl\left(v_2 - v_1\right) = 0. \qquad (4) \qquad \textbf{(3 б.)}$$

Выразив Q из (1), v_2 из (2) и подставив их в (4), получим уравнение для v_1:

$$\frac{m_1 v_1}{CBl} - Bl\left(v_0 - \frac{m_1}{m_2} v_1 - v_1\right) = 0,$$

откуда найдём

ответ: $$v_1 = \frac{v_0}{1 + \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_1}{CB^2 l^2}}. \qquad \textbf{(1 б.)}$$

5. Оценить, с какой максимальной скоростью грузовик может совершать поворот на перекрёстке, чтобы незакреплённые грузы не смещались (не скользили по кузову). Предполагается, что Вы хорошо представляете явление, можете сами задать необходимые для решения задачи величины, выбрать их числовые значения и получить численный результат.

Решение.

Пусть R — радиус кривизны траектории автомобиля на повороте. Чтобы груз не смещался относительно автомобиля, он должен пройти по той же траектории, а следовательно, двигаться с ускорением

$$a = \frac{v^2}{R}, \qquad \textbf{(3 б.)}$$

где v — скорость груза (а следовательно, и искомая скорость автомобиля). При этом на груз по горизонтали действует только сила трения. Следовательно, по второму закону Ньютона

$$F_{\text{тр}} = ma = \frac{mv^2}{R}.$$

Следовательно, максимальная скорость $v_{\max}$ соответствует максимально возможной силе трения. Последняя, как известно, равна

$$F_{\text{тр}}^{\max} = \mu N, \qquad \textbf{(2 б.)}$$

где μ – коэффициент трения, а сила реакции N равна mg, что следует из баланса сил в проекции на вертикальную ось. Значит,

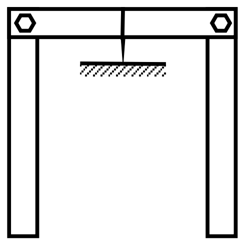
$$\mu mg = \frac{mv_{\max}^2}{R}. \qquad \textbf{(2 б.)}$$

Отсюда находим $v_{\max}$:

$$v_{\max} = \sqrt{\mu g R}. \qquad \textbf{(1 б.)}$$

Подставив сюда численные значения $g \approx 10$ м/с^2, $R \approx 5$ м и $\mu \approx 0.5$, получим

ответ: $v_{\max} \approx 5$ м/с ≈ 20 км/ч. **(2 б.)**



6. **Задача-демонстрация** (демонстрируется видеоролик). Три одинаковые рейки соединены в виде буквы П с помощью двух винтов. К верхней горизонтальной рейке по центру приклеена зубочистка. Эту конструкцию пытаются установить на горизонтальную подставку, как показано на рисунке. Это удаётся, если рейки жёстко скрепить между собой, затянув винты. Даже если при этом конструкцию наклонить, она качается, но не падает. Если же винты ослабить, сделав соединения реек шарнирными, то конструкцию не удаётся установить на подставку — она падает. Объясните наблюдаемое явление.

Решение.

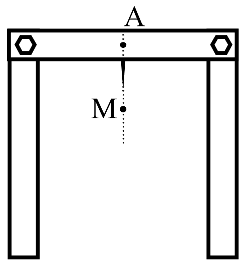
Из приведённой демонстрации видно, что в первом случае конструкция находится в положении устойчивого равновесия, а во втором случае — равновесие неустойчивое.

Поясним это.

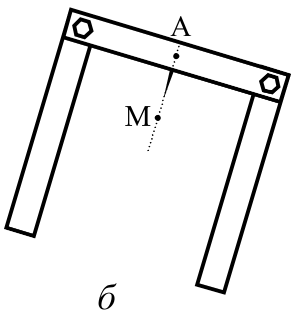
На рис. *а* показан центр масс М конструкции, который расположен на оси симметрии на некотором расстоянии l от центра масс А верхней рейки ниже точки опоры О.

При повороте жёстко скреплённой конструкции относительно вертикали центр масс остаётся, очевидно, лежащем на оси симметрии на том же расстоянии l от точки А (рис. *б*).

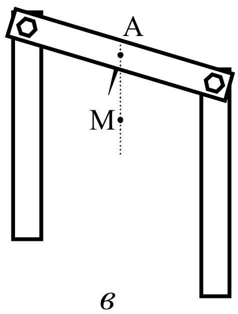
При повороте шарнирной конструкции относительно вертикали (рис. *в*) центр масс М лежит на вертикальной прямой, проходящей через точку А, т.к. относительно этой прямой левая рейка смещается вправо на столько же, на сколько правая смещается влево. Кроме того, левая рейка смещается вверх на столько же, на сколько правая вниз, поэтому положение центра масс по вертикали относительно точки А не меняется: $|\mathrm{AM}| = l$.



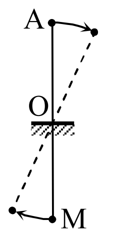
а



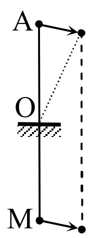
б



в



г



д

На рисунках *г* и *д* показаны перемещения точек А и М в случае отклонения жёсткой и шарнирной конструкций, установленных на опору в точку О. Видно, что в первом случае при отклонении из положения равновесия центр масс поднимается, а во втором — опускается.

При отклонении из положения равновесия система может самопроизвольно возвращаться в положение равновесия (тогда это *устойчивое* равновесие) или самопроизвольно отклоняться еще сильнее (тогда это *неустойчивое* равновесие).

В случае жёсткой конструкции отклонение сопровождается подъёмом центра масс, т.е. увеличением потенциальной энергии. Поэтому самопроизвольное дальнейшее отклонение противоречило бы закону сохранения энергии. Значит, система не стремится отклониться еще сильнее, т.е. это устойчивое равновесие, при котором конструкция не падает.

Отклонение же шарнирной конструкции сопровождается понижением центра масс, т.е. уменьшением потенциальной энергии. Поэтому возврат в положение равновесия без совершения внешней работы невозможен. Следовательно, положение равновесия не является устойчивым. Напротив, дальнейшее отклонение возможно; при этом уменьшение потенциальной энергии будет сопровождаться увеличением кинетической энергии, и конструкция упадёт.

Методика оценки:

Указание на устойчивость (в первом случае) и неустойчивость (во втором случае) равновесия — **2 б.**
Указание на положение центра масс конструкции — **2 б.**
Обоснование подъёма (в первом случае) и опускания (во втором случае) центра масс при отклонении — **5 б.**
Прочие необходимые рассуждения — **1 б.**

Примечание: падение конструкции во втором случае можно объяснить также, рассмотрев моменты сил. Если при этом устойчивость в первом случае не обоснована, оцениваем задачу в **5 баллов**. Если же, кроме того, обоснована и устойчивость жёсткой конструкции, то, разумеется, оцениваем максимальным баллом (**10 б.**).