ОЛИМПИАДА “БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ – БУДУЩЕЕ НАУКИ” 2019-2020

Физика, финальный тур. *Время выполнения - 180 минут*

РЕШЕНИЯ

Внимание жюри: квант оценки равен 5 (можно ставить только 5, 10, 15 и т. д. баллов)!

11 класс

1. (25 баллов) При разрыве снаряда на поверхности земли осколки полетели во все стороны с одинаковой скоростью. В точку, находящуюся на расстоянии 250 м от места разрыва, упали два осколка с интервалом 10 с. Под какими углами к горизонту вылетели эти осколки? Чему равен радиус круга всех упавших осколков? Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

Ответ: Осколки вылетели под углами $\alpha_1 = 15°$ и $\alpha_2 = 75°$. Радиус круга равен 500 м.

Решение: Обозначим начальную скорость осколков через V_0, а углы вылета двух осколков через α_1 и α_2. Приравнивая дальности полета двух осколков

$$\frac{V_0^2\sin 2\alpha_1}{g} = \frac{V_0^2\sin 2\alpha_2}{g},$$

получаем, что $\sin 2\alpha_1 = \sin 2\alpha_2$ и, следовательно, $\alpha_1 + \alpha_2 = 90°$. Учитывая также, что дальность полета L можно записать через времена полета осколков $t_{1,2}$ как $L = V_0\cos\alpha_1 t_1 = V_0\cos\alpha_2 t_2$, получаем соотношение

$$t_2 - t_1 = \frac{L}{V_0}\left(\frac{1}{\cos\alpha_2} - \frac{1}{\cos\alpha_1}\right),$$

которое, с учетом полученной выше связи между углами, преобразуем к виду

$$t_2 - t_1 = \frac{L}{V_0}\left(\frac{1}{\sin\alpha_1} - \frac{1}{\cos\alpha_1}\right). \qquad (1)$$

Используя формулу для времени полета осколка, запишем еще одно соотношение

$$t_2 - t_1 = \frac{2V_0}{g}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1),$$

которое преобразуем к виду

$$t_2 - t_1 = \frac{2V_0}{g}(\cos\alpha_1 - \sin\alpha_1), \qquad (2)$$

Перемножая формулы (1) и (2), исключаем неизвестную скорость V_0 и получаем уравнение для угла α_1:

$$\frac{g(t_2-t_1)^2}{2L} = \frac{(\cos\alpha_1 - \sin\alpha_1)^2}{\sin\alpha_1\cos\alpha_1}.$$

Подставляя численные значения $t_2 - t_1 = 10$ с, $L = 250$ м и $g = 10$ м/с^2, получаем

$$\frac{g(t_2-t_1)^2}{2L} = 2.$$

При этом уравнение для угла α_1 сводится к простому виду

$$\sin 2\alpha_1 = 0{,}5,$$

откуда получаем $2\alpha_1 = 30°$. Следовательно, $\alpha_1 = 15°$ и $\alpha_2 = 75°$.

Радиус круга всех упавших осколков равен дальности полета осколков, вылетевших под углом 45°, т.е.

$$L_{\max} = \frac{V_0^2}{g}.$$

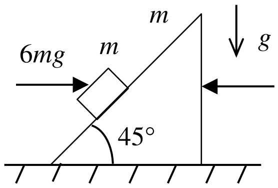
Поделив это соотношение на формулу для дальности полета осколков, вылетевших под углом α_1

$$L = \frac{V_0^2\sin 2\alpha_1}{g},$$

получаем $L_{\max} = L/\sin 2\alpha_1 = 2L = 500$ м.

Разбалловка: Получено соотношение $\alpha_1 + \alpha_2 = 90°$ – 5 баллов.
Получено замкнутое уравнение для угла вылета осколка – 10 баллов.
Найдены углы вылета осколков – 5 баллов.
Найден радиус круга упавших осколков – 5 баллов.

2. (25 баллов) Брусок массы m находится на наклонной грани клина той же массы с углом 45° при основании, расположенного на горизонтальном столе. Коэффициент трения между бруском и телом равен 0,5, трение между клином и столом отсутствует. К бруску и клину во встречных направлениях приложены горизонтальные силы, величина одной из которых равна $6mg$, где g – ускорение свободного падения (см. рис.). Чему равна величина другой силы, если ускорение бруска направлено вертикально?



Ответ: Величина силы равна $7mg$.

Решение: Обозначив через N силу давления клина на брусок, а через μ коэффициент трения ($\mu = 0{,}5$), запишем второй закон Ньютона для бруска в проекции на горизонтальную ось

$$0 = 6mg - N\frac{\sqrt{2}}{2} - \mu N\frac{\sqrt{2}}{2}$$

и на вертикальную (направленную вверх) ось

$$ma_1 = N\frac{\sqrt{2}}{2} - \mu N\frac{\sqrt{2}}{2} - mg,$$

где a_1 – ускорение бруска. В записанных соотношениях учтено, что ускорение бруска направлено по вертикали (вверх) и сила трения скольжения равна μN и направлена вдоль наклонной грани клина (вниз). Второй закон Ньютона для клина в проекции на горизонтальную (направленную влево) ось запишем в виде

$$ma_2 = F - N\frac{\sqrt{2}}{2} - \mu N\frac{\sqrt{2}}{2},$$

где a_2 – ускорение клина. Из условия равенства проекций ускорений бруска и клина на ось, перпендикулярную наклонной грани клина (кинематическая связь), следует, что

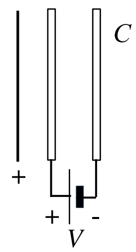
$$a_1 = a_2.$$

Из системы записанных уравнений находим, что $F = 7mg$. При этом $a_1 = a_2 = g$, $N = 4\sqrt{2}mg$.

Если предположить, что ускорение бруска направлено вниз, а ускорение клина вправо, то можно прийти к ответу $F = 24mg$. Получающиеся при этом отрицательные значения ускорений $a_1 = a_2 = -17g$ говорят об ошибочности предположения и неверности ответа $F = 24mg$.

Разбалловка: Записан второй закон Ньютона для бруска в проекции на горизонталь – 5 баллов.
Записан второй закон Ньютона для бруска в проекции на вертикаль – 5 баллов.
Записан второй закон Ньютона для клина в проекции на горизонталь – 5 баллов.
Записана связь ускорений – 5 баллов.
Получен правильный ответ – 5 баллов.

3. (25 баллов) Плоский конденсатор емкости C подключен к батарее с напряжением V. После того, как к конденсатору поднесли пластину с равномерно распределенным по ней положительным зарядом (см. рис.), напряженность электрического поля между пластиной и ближайшей обкладкой конденсатора стала равной напряженности поля внутри конденсатора. Какую работу совершила батарея? Чему равен заряд пластины, если она имеет те же размеры, что и обкладки конденсатора?



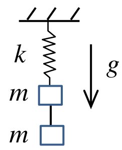
Ответ: Работа батареи равна $-CV^2$. Заряд пластины равен $2CV$.

Решение: При поднесении пластины к конденсатору на внешних поверхностях его обкладок появляются заряды, поле которых компенсирует поле пластины внутри обкладок и между обкладками конденсатора. Заряды на внутренних поверхностях обкладок не меняются и равны $\pm CV$. Поскольку напряженность электрического поля одинакова слева и справа от левой обкладки, заряды на поверхностях этой обкладки равны по величине и противоположны по знаку. Таким образом, на внешней поверхности левой обкладки появляется заряд $-CV$, который приходит туда через батарею с внешней поверхности правой обкладки (где остается заряд CV). При этом батарея совершает работу $-CV^2$.

Чтобы найти заряд пластины, рассмотрим точку внутри одной из обкладок конденсатора, где поле равно нулю. В этой точке поле пластины компенсируется суммарным полем зарядов $\pm CV$, расположенных на внешних обкладках конденсатора. Следовательно, заряд пластины вдвое превышает заряд CV, т.е. равен $2CV$.

Разбалловка: Понято, что на внешних поверхностях обкладок появляются заряды – 5 баллов.
Понято, что заряды на внутренних поверхностях обкладок не меняются – 5 баллов.
Найдены заряды на внешних поверхностях обкладок – 5 баллов.
Найдена работа батареи – 5 баллов.
Найден заряд пластины – 5 баллов.

4. (25 баллов) На пружине жесткости k висит груз массы m, к которому прикрепляют висящий на нити груз той же массы (см. рис.) и отпускают без толчка. Считая, что предельное натяжение нити равно $5mg/4$, где g – ускорение свободного падения, найти время, через которое нить оборвется, и максимальное удлинение пружины.



Ответ: Нить оборвется через время $\frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{2m}{k}}$. Максимальное удлинение пружины равно $\left(1+\sqrt{\frac{21}{8}}\right)\frac{mg}{k}$.

Решение: Направим ось x вниз и примем, что в начальный момент $x = 0$ для верхнего груза. Если бы нить не обрывалась, то движение грузов представляло бы собой гармонические колебания около положения равновесия $x = mg/k$ (отсчет ведем по верхнему грузу), в котором сила упругости, равная $-k(x + mg/k)$, уравновешивает силу тяжести $2mg$. При этом координата верхнего груза изменялась бы во времени по закону

$$x(t) = \frac{mg}{k} - \frac{mg}{k}\cos\omega t,$$

где $\omega = \sqrt{k/(2m)}$, а его скорость и ускорение, соответственно, как

$$v_x(t) = g\sqrt{\frac{m}{2k}}\sin\omega t, \quad a_x(t) = \frac{g}{2}\cos\omega t.$$

Зависимость силы натяжения нити T от времени проще всего найти из второго закона Ньютона для нижнего груза (ускорения обоих грузов, если нить не оборвалась, одинаковы):

$$T = mg - ma_x = mg(1 - 0{,}5\cos\omega t).$$

Отсюда видно, что сила T достигает предельного значения $5mg/4$ при $\cos\omega t = -0{,}5$, т.е. в момент времени $t_1 = \frac{2\pi}{3\omega} = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{2m}{k}}$. В этот момент нить рвется и нижний груз отрывается. Дальнейшее движение верхнего груза представляет собой гармонические колебания

$$x(t) = A\cos(\Omega t + \varphi)$$

с угловой частотой $\Omega = \sqrt{k/m}$ и амплитудой и фазой, определяемыми значениями координаты и скорости груза в момент t_1:

$$x(t_1) = \frac{3mg}{2k}, \qquad v_x(t_1) = g\sqrt{\frac{3m}{8k}}.$$

Таким образом, получаем уравнения

$$A\cos(\Omega t_1 + \varphi) = \frac{3mg}{2k}, \qquad A\sin(\Omega t_1 + \varphi) = -\frac{g}{\Omega}\sqrt{\frac{3m}{8k}}.$$

Возводя уравнения в квадрат и складывая, находим амплитуду

$$A = \sqrt{\frac{21}{8}}\frac{mg}{k}.$$

Максимальное удлинение пружины равно

$$mg + A = \left(1+\sqrt{\frac{21}{8}}\right)\frac{mg}{k}.$$

Разбалловка: Записаны колебания грузов до обрыва нити – 5 баллов.
Найдена зависимость от времени силы натяжения – 5 баллов.
Найдено время обрыва нити – 5 баллов.
Найдено максимальное удлинение пружины – 10 баллов.