11 класс

1. (25 баллов) При каких значениях угла между начальной скоростью и горизонтом брошенное тело будет удаляться от точки броска в течение всего полета?

Ответ: При углах α, удовлетворяющих условию $\sin\alpha < \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Решение: Квадрат удаления ℓ брошенного тела от точки броска зависит от времени *t* по закону

$$\ell^2(t) = (V_0\cos\alpha t)^2 + (V_0\sin\alpha t - gt^2/2)^2 = V_0^2t^2 - gV_0\sin\alpha t^3 + g^2t^4/4\,.$$

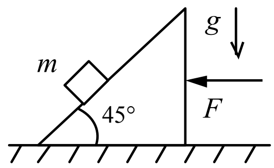
Если удаление меняется со временем немонотонно (тело сначала удаляется, затем приближается, затем снова удаляется), то функция $\ell(t)$ (и $\ell^2(t)$) имеет две точки экстремумов (максимум и минимум). В этих двух точках (в эти два момента времени) производная $\ell^2(t)$ по времени обращается в нуль. Приравнивая к нулю эту производную, получаем уравнение

$$g^2t^2 - 3gV_0\sin\alpha t + 2V_0^2 = 0.$$

Отсутствие действительных решений данного уравнения (отрицательность дискриминанта $D = 9g^2V_0^2\sin^2\alpha - 8\,g^2V_0^2$) означает отсутствие экстремумов, т.е. непрерывное удаление тела от точки броска в течение всего полета. Из условия $D < 0$ находим, что $\sin\alpha < \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Разбалловка: Записано выражение для удаления тела от точки броска – 5 баллов.
Получено квадратное уравнение для моментов экстремального удаления – 5 баллов.
Записано условие $D < 0$ – 10 баллов.
Получено неравенство для $\sin\alpha$ – 5 баллов.

2. (25 баллов) Брусок массы m положили на гладкую наклонную грань клина пренебрежимо малой массы, расположенного на гладком горизонтальном столе. Какую горизонтальную силу F следует приложить к клину (см. рис.), чтобы ускорение бруска было направлено под углом 30° к вертикали? Угол при основании клина 45°, ускорение свободного падения равно *g*.



Ответ: $F = \frac{mg}{1+\sqrt{3}}$.

Решение: Из невесомости клина следует, что горизонтальная проекция силы *N* нормального давления бруска на клин равна силе *F*. Отсюда находим, что $N = \sqrt{2}F$. Такая же сила действует на брусок со стороны клина. Записывая второй закон Ньютона для бруска в проекции на ось, перпендикулярную к ускорению бруска, получаем

$$0 = N\cos 15° - mg\cos 60°.$$

Из двух соотношений находим

$$F = \frac{mg}{2\sqrt{2}\cos 15°} = \frac{mg}{1+\sqrt{3}}\,.$$

Разбалловка: Сила *N* выражена через *F* – 10 баллов.
Сила *N* выражена через силу тяжести – 10 баллов.
Получен ответ – 5 баллов.

3. (25 баллов) Положительный точечный заряд q находится на некотором расстоянии от равномерно заряженной плоскости с отрицательной поверхностной плотностью заряда -σ. При каких расстояниях между зарядом и плоскостью электрическое поле будет равно нулю в двух точках? При каком расстоянии между зарядом и плоскостью разность потенциалов между точками с нулевым полем будет максимальной? Поле плоскости равно по величине $\sigma/(2\varepsilon_0)$, где ε_0 – электрическая постоянная.

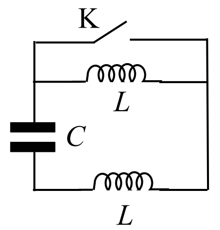
Ответ: Поле будет равно нулю в двух точках, если расстояние от заряда до плоскости меньше $\sqrt{q/(2\pi\sigma)}$. Разность потенциалов максимальна при расстоянии, равном $\sqrt{q/(2\pi\sigma)}$.

Решение: Две точки с нулевым полем могут находиться только по разные стороны от плоскости. В полупространстве с той стороны от плоскости, где находится заряд, точка с нулевым полем существует при любом расстоянии между зарядом и плоскостью, т.к. поле плоскости постоянно, а поле заряда принимает все значения от нуля до бесконечности. Чтобы точка с нулевым полем существовала и в полупространстве, где нет точечного заряда (с другой стороны от плоскости), поле заряда должно превышать поле плоскости в некоторой области. Для этого необходимо, чтобы расстояние между зарядом и плоскостью было меньше

$\sqrt{q/(2\pi\sigma)}$. Разность потенциалов между точками с нулевым полем достигает максимального значения $\frac{1}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{q\sigma}{2\pi}}$, когда одна из точек находится бесконечно близко к плоскости.

Разбалловка: Понято, где находятся точки с нулевым полем – 5 баллов.
Найдено расстояние, при котором есть две точки с нулевым полем – 10 баллов.
Понято, что разность потенциалов в искомых точках
создается только плоскостью – 5 баллов.
Найдено расстояние, при котором разность потенциалов максимальна – 5 баллов.

4. (25 баллов) В колебательном контуре с двумя одинаковыми катушками индуктивности L и конденсатором емкости C (см. рис.) происходят колебания с амплитудой тока I_0. В момент, когда ток максимален, одна из катушек замыкается ключом К накоротко. Через какое время после замыкания ток через ключ достигнет максимального значения? Чему равно это максимальное значение? Считать, что магнитное поле одной катушки не пронизывает другую.



Ответ: Через время $\pi\sqrt{LC}$. Максимальное значение тока равно $2I_0$.

Решение: После замыкания ключа ток в закороченной катушке меняться не будет и останется равным I_0. Действительно, в случае его изменения на концах катушки возникало бы напряжение, что приводило бы к бесконечному току через ключ. Таким образом, процессы в цепи после замыкания ключа можно представить следующим образом. В контуре из верхней катушки и ключа против часовой стрелки циркулирует постоянный ток I_0, а в контуре из нижней катушки, конденсатора и ключа циркулирует переменный ток с периодом $2\pi\sqrt{LC}$ и амплитудой I_0. В первый момент после замыкания этот ток идет по часовой стрелке и равен I_0. Ток через ключ является суммой этих постоянного и переменного токов. В начальный момент токи через ключ идут навстречу друг другу и их сумма равна нулю. Через полпериода (через время $\pi\sqrt{LC}$) эти токи станут сонаправленными, их сумма будет равна $2I_0$.

Разбалловка: Понято, что ток через верхнюю катушку не меняется – 10 баллов.
Найдено искомое время – 10 баллов.
Найден максимальный ток – 5 баллов.