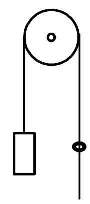
ОЛИМПИАДА “БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ – БУДУЩЕЕ НАУКИ” 2017-2018

Физика, финальный тур

РЕШЕНИЯ И РАЗБАЛЛОВКА

11 класс

1. (20 баллов) К левому концу идеальной нити, переброшенной через невесомый блок, подвешен груз массы m, а по правой части нити скользит с постоянной относительно нити скоростью кольцо массы $m/2$ (см. рисунок). Найти ускорение груза (10 баллов) и силу трения, действующую на кольцо (10 баллов). Ускорение свободного падения g считать известным.



Ответ: Ускорение груза равно $g/3$. Сила трения равна $2mg/3$.

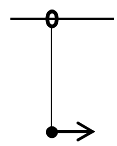
Решение: Ускорение кольца направлено вверх и равно по величине ускорению груза. Записывая второй закон Ньютона для груза и кольца в виде

$$ma = mg - T, \qquad ma/2 = F_{тр} - mg/2$$

и учитывая, что действующая на кольцо сила трения $F_{тр}$ равна силе натяжения нити T, находим a и T.

Разбалловка: Понято, что ускорения груза и кольца равны по величине – 5 баллов
Понято, что сила трения равна силе натяжения нити – 5 баллов
Найдено ускорение груза – 5 баллов
Найдена сила трения – 5 баллов

2. (20 баллов) Шарик висит на идеальной нити, прикрепленной к кольцу, которое может скользить без трения по неподвижной горизонтальной спице. Массы шарика и кольца равны. После того, как шарику сообщили некоторую начальную скорость вдоль спицы (см. рисунок), максимальный угол отклонения нити от вертикали составил 45°. Найти отношение ускорений шарика и кольца в момент максимального отклонения нити.



Ответ: Ускорение шарика в $\sqrt{5}$ раз больше ускорения кольца.

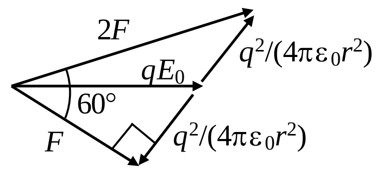
Решение: Ускорение шарика можно представить в виде векторной суммы ускорения кольца и ускорения шарика относительно кольца. Поскольку ускорение кольца горизонтально, то вертикальное ускорение шарика одинаково и относительно кольца, и в неподвижной системе отсчета. В неподвижной системе отсчета ускорение кольца и горизонтальное ускорение шарика всегда равны по величине и противоположны по направлению (в силу сохранения импульса системы в направлении вдоль спицы). Отсюда следует, что горизонтальная компонента относительного ускорения шарика всегда вдвое больше ускорения кольца. В положении максимального отклонения нити ускорение шарика относительно кольца направлено перпендикулярно нити (является тангенциальным). Поскольку при этом нить отклонена на 45°, горизонтальная и вертикальная проекции относительного ускорения шарика равны между собой и равны удвоенному ускорению кольца. Таким образом, в неподвижной системе отсчета в положении максимального отклонения нити горизонтальное ускорение шарика равно ускорению кольца, вертикальное – вдвое больше, а модуль ускорения в $\sqrt{5}$ раз превышает ускорение кольца.

Разбалловка: Понято, что относительное ускорение
шарика направлено перпендикулярно нити – 5 баллов
Понято, что горизонтальная компонента
ускорения шарика относительно земли равна ускорению кольца – 5 баллов
Показано, что вертикальная компонента ускорения шарика
относительно земли вдвое больше его горизонтальной компоненты – 5 баллов
Найдено искомое отношение – 5 баллов

3. (30 баллов) В однородном электрическом поле напряженности E_0 находятся два одинаковых точечных заряда величины q. Действующие на заряды электрические силы отличаются в два раза и направлены под углом 60° друг к другу. Найти расстояние между зарядами.

Ответ: Расстояние между зарядами равно $\sqrt[4]{\frac{7}{3}}\sqrt{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 E_0}}$.

Решение:
Электрическая сила, действующая на каждый из зарядов, равна векторной сумме сил со стороны однородного поля (qE_0) и другого заряда ($q^2/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$, где ε_0 – электрическая постоянная, а r – расстояние между зарядами). Заданное соотношение между величинами сил (F и $2F$) и угол 60° между их направлениями достигаются при таком расположении зарядов, когда силы F и $2F$ являются соответственно катетом и гипотенузой прямоугольного треугольника, представленного на рисунке. Из соотношения катетов этого треугольника находим



$$F = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

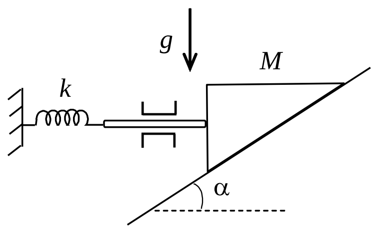
Рассмотрим далее прямоугольный треугольник с гипотенузой qE_0 и катетами F и $q^2/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$. Записывая теорему Пифагора для этого треугольника

$$F^2 + \frac{q^4}{\left(4\pi\varepsilon_0 r^2\right)^2} = \left(qE_0\right)^2$$

и подставляя в нее F из предыдущего соотношения, находим расстояние между зарядами.

Разбалловка: Расставлены векторы электрических сил – 5 баллов
Понято, что векторы сил образуют прямоугольный треугольник – 10 баллов
Составлены уравнения связи сил – 10 баллов
Найдено расстояние между зарядами – 5 баллов

4. (30 баллов) На наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, находится призма массы M, в вертикальную грань которой упирается шток пренебрежимо малой массы (см. рисунок). Шток скреплен со стенкой пружиной жесткости k и из-за направляющих может двигаться только по горизонтали. Пренебрегая трением между призмой и наклонной плоскостью, призмой и штоком, штоком и направляющими, найти период колебаний призмы (20 баллов). Найти упругую энергию пружины в момент прохождения призмой положения равновесия (10 баллов).



Ответ: Период колебаний призмы равен $\frac{2\pi}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{M}{k}}$. Упругая энергия пружины равна $\frac{\left(Mg\,\mathrm{tg}\alpha\right)^2}{2k}$.

Решение: Призма совершает гармонические колебания, двигаясь вдоль наклонной плоскости. Направим ось z вниз вдоль наклонной плоскости и запишем второй закон Ньютона в проекции на эту ось:

$$Mz'' = Mg\sin\alpha - F\cos\alpha.$$

Здесь F – сила, с которой шток действует на призму, а z'' - ускорение призмы вдоль оси z. Из-за невесомости штока сила F равна упругой силе, действующей на шток со стороны пружины, т.е. $F = kx$, где $x = z\cos\alpha$ - уменьшение длины пружины в ходе колебаний (горизонтальное смещение призмы от положения недеформированной пружины). Из записанных соотношений получаем уравнение

$$z'' + \frac{k\cos^2\alpha}{M}\left(z - \frac{Mg\sin\alpha}{k\cos^2\alpha}\right) = 0.$$

Данное уравнение представляет собой уравнение гармонического осциллятора относительно переменной $z - \frac{Mg\sin\alpha}{k\cos^2\alpha}$ и описывает колебания с угловой частотой $\Omega = \sqrt{\frac{k\cos^2\alpha}{M}}$ относительно равновесного положения $z_0 = \frac{Mg\sin\alpha}{k\cos^2\alpha}$. Период колебаний T и упругую энергию при прохождении положения равновесия находим по формулам $T = 2\pi/\Omega$ и $W = k(z_0\cos\alpha)^2/2$.

Разбалловка: Записана связь смещения призмы вдоль
наклонной плоскости с деформацией пружины – 5 баллов

Получено уравнение колебаний – 10 баллов
Найден период колебаний – 5 баллов
Найдена упругая энергия – 10 баллов