9 класс

9.1. Внутри прямоугольника $ABCD$ отметили точку M и на отрезках AM, BM, CM и DM построили как на диаметрах четыре круга. Пусть S_A, S_B, S_C, S_D – соответственно, площади этих кругов. Докажите, что $S_A + S_C = S_B + S_D$.

Решение. Пусть $AB = a$, $AD = b$ и x, y – расстояния от точки M до сторон AB и AD соответственно. Тогда по теореме Пифагора и формуле площади круга будем иметь $S_A = \pi\frac{x^2 + y^2}{4}$, $S_B = \pi\frac{x^2 + (a-y)^2}{4}$, $S_C = \pi\frac{(b-x)^2 + (a-y)^2}{4}$, $S_D = \pi\frac{(b-x)^2 + y^2}{4}$. Отсюда непосредственно следует требуемое соотношение.

9.2. Имеется пять палочек, длина каждой больше 2 см, но меньше 8 см. Докажите, что можно взять три палочки из этих пяти и сложить из них треугольник.

Решение. См. задачу 8.3.

9.3. Дан треугольник ABC с медианой BM. На медиане отметили произвольную точку P и через P провели прямую, параллельную AB, а через точку C провели прямую, параллельную BM. Эти прямые пересеклись в точке Q. Докажите, что отрезок BP делится пополам в точке пересечения с прямой AQ.

Решение. См. задачу 8.4.

9.4. Сколько существует трехзначных натуральных чисел n, для которых число $n^3 - n^2$ является точным квадратом?

Ответ: 22. **Решение.** Пусть $n^3 - n^2 = m^2$ для некоторого натурального m. Тогда $n^2(n-1) = m^2$ и поэтому $n-1$ тоже должно быть точным квадратом: $n - 1 = a^2$. Значит, $n = a^2 + 1$ и $m = (a^2 + 1)a$. Таким образом, требуется найти все трехзначные числа n, на единицу большие точных квадратов. Такими числами являются $101 = 10^2 + 1, 122 = 11^2 + 1, \ldots, 962 = 31^2 + 1$ (следующий квадрат $32^2 = 1024$ – уже не подходит).

9 класс

9.1. **а)** Докажите, что для любого числа $d > 0$ существует прямоугольный треугольник, у которого больший катет отличается по длине и от меньшего катета и от гипотенузы на d. **б)** Докажите, что радиус вписанной окружности такого треугольника равен d.

Решение. **а)** Пусть $a < b$ – длины катетов, c – длина гипотенузы. Тогда должны выполняться равенства $a = b - d$, $c = b + d$ и по теореме Пифагора $(b+d)^2 = (b-d)^2 + b^2 \Leftrightarrow b^2 = 4bd \Leftrightarrow b = 4d$ и значит, $a = 3d$, $b = 5d$. Очевидная проверка (обратная теорема Пифагора) показывает, что такой треугольник прямоугольный (и подобный пифагорову треугольнику со сторонами 3, 4, 5). **б)** Из пункта а) следует, что такой треугольник единственный, его стороны $3d$, $4d$, $5d$, и для него $r = \frac{1}{2}(a + b - c) = d$.

9.2. На ребрах куба в некотором порядке расставили числа 1, 2, ..., 12 и для каждой грани подсчитали сумму четырех чисел на ее ребрах. Докажите, что есть грань, для которой эта сумма больше 25.

Решение. См. задачу 8.3.

9.3. Дан прямоугольный треугольник, у которого высота, опущенная на гипотенузу, в 4 раза меньше гипотенузы. Найдите острые углы этого треугольника.

Ответ: 15° и 75°. **Решение**. См. задачу 8.4.

9.4. Существует ли такое натуральное n, что число $n^2 + 6n + 2019$ делится на 100?

Ответ: не существует. **Решение.** Преобразуем выражение $n^2 + 6n + 2019 = (n+3)^2 + 2010$. Если данная сумма делится на 100 (а значит, и на 10), то число $(n+3)^2$ должно делиться на 10,а тогда оно делится на 100 (в разложении точного квадрата на простые множители все показатели степеней – четные числа). Но 2010 не делится на 100, и поэтому искомого числа n не существует.