9 класс

9.1. Найдите все простые числа p, для которых $8p+1$ представляет собой: **а**) точный квадрат? **б**) точный куб?

Ответ. **а**) $p=3$; **б**) таких p не существует. **Решение.** См. задачу 8.2**.**

9.2. Даны две квадратичные функции $f(x)=ax^2+bx+c$ и $g(x)=cx^2+bx+a$. Оказалось, что функция $f(x)+g(x)$ имеет единственный корень. Докажите, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют общий корень.

Решение. Квадратный трехчлен $f(x)+g(x)=(a+c)x^2+2bx+(a+c)$ имеет единственный корень при условии равенства нулю дискриминанта: $b^2-(a+c)^2=0$. Отсюда следует, что либо $a+c=b$, либо $a+c=-b$. В случае, когда $a+c=b$, имеем $f(-1)=g(-1)=0$, а в случае, когда $a+c=-b$, получим $f(1)=g(1)=0$. Таким образом, в обоих случаях функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют общий корень. *Комментарий.* В приведенном решении подразумевается, что функция $f(x)+g(x)$ квадратичная. Если же $a+c=0$, то $f(x)+g(x)=2bx$ и при $b\neq 0$ эта линейная функция имеет единственный корень $x=0$, однако $f(x)$ и $g(x)$ не имеют общих корней. Если участник олимпиады обнаружил такой контрпример (показав для конкретных коэффициентов или в общем виде отсутствие общих корней), то он заслуживает полного балла за эту задачу.

9.3. n фишек с номерами $1, 2,...,n$ расставлены в ряд по возрастанию. За один ход разрешается поменять местами любые две фишки, между которыми либо две, либо пять фишек. Существует ли такое n, для которого удастся за несколько ходов расставить все фишки в обратном порядке?

Ответ. Не существует. **Решение.** См. решение задачи 8.3. По сравнению с условиями задачи 8.3 здесь имеется дополнительная возможность переставлять местами две фишки, между которыми пять фишек. Это позволяет изменять координаты на 6 единиц, но эта дополнительная возможность не меняет остатка при делении на 3 координаты фишки, поэтому доказательство задачи 8.3 остаётся в силе.

9.4. На сторонах CD и AD квадрата $ABCD$ отмечены точки M и Nсоответственно. Оказалось, что $CM+AN=BN$. Докажите, что $\angle CBM=\angle MBN$

Решение. См. задачу 8.4.

9.5. Дан выпуклый 37-угольник, у которого все углы выражаются целым числом градусов. Докажите, что среди углов имеются хотя бы три одинаковых.

Решение. Предположим противное, а именно: пусть каждый угол многоугольника повторяется не более двух раз, и воспользуемся свойством суммы внешних углов выпуклого многоугольника: она равна 360°. Но сумма внешних углов данного многоугольника не меньше $1+1+2+2+...+18+18+19$ (мы взяли самые маленькие возможные значения внешних углов не более двух раз каждое). Подсчет этой суммы дает $361>360$. Противоречие доказывает наше утверждение.