8 класс

8.1. На итоговой контрольной среди седьмых классов школы присутствовало 80 человек. В результате все получили положительные отметки (тройки, четвёрки или пятёрки), а средний балл оказался равен 3,45. Докажите, что четвёрок было четное количество.

Решение. См. задачу 7.1.

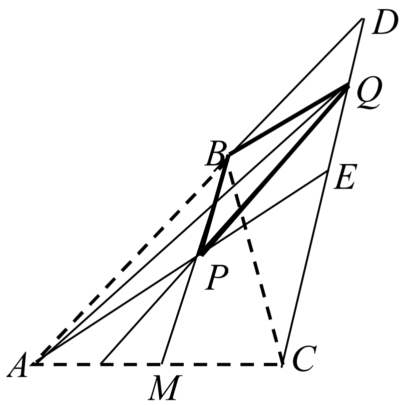
8.2. Петя говорит Коле: «Я расставил некоторые числа в вершинах куба, а затем на каждой грани написал сумму четырёх чисел в ее вершинах. Потом я сложил все шесть чисел на гранях и у мен получилось 2019. Сможешь ли ты узнать, чему равна сумма восьми чисел в вершинах куба?» А как бы вы на месте Коли ответили на этот вопрос?

Ответ: 673. **Решение.** См. задачу 7.2.

8.3. Имеется пять палочек, длина каждой больше 2 см, но меньше 8 см. Докажите, что можно взять три палочки из этих пяти и сложить из них треугольник.

Решение. Упорядочим длины палочек по возрастанию: $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5$. Предположив противное, будем иметь: $a_3 \ge a_1 + a_2 > 2 + 2 = 4$. Далее, $a_4 \ge a_2 + a_3 > 2 + 4 = 6$ и $a_5 \ge a_3 + a_4 > 4 + 6 = 10$/ Таким образом, получили противоречие с условием задачи.

8.4. Дан треугольник *ABC* с медианой *BM*. На медиане отметили произвольную точку *P* и через *P* провели прямую, параллельную *AB*, а через точку *C* провели прямую, параллельную *BM*. Эти прямые пересеклись в точке *Q*. Докажите, что отрезок *BP* делится пополам в точке пересечения с прямой *AQ*.



Решение. Пусть *D* – точка пересечения прямых *AB* и *CQ* и *E* – точка пересечения прямых *AP* и *CQ*. Рассмотрим треугольник *ADE* и покажем, что $\Delta\, PBQ$ – серединный треугольник в $\Delta\, ADE$. Действительно, точка *P* – середина отрезка *AE* (т.к. *M* – середина *AC* и *CQ* || *MP*). Далее, отрезки *PB* и *PQ* – средние линии в $\Delta\, ADE$, т.к. они проведены через середину стороны параллельно другим двум сторонам треугольника. Итак, $\Delta\, PBQ$ – серединный треугольник, и поэтому *ABQP* – параллелограмм; поэтому его диагонали в точке пересечения делятся пополам.

8 класс

8.1. 8а классе по списку 60% девочек. Когда из-за болезни в класс не пришли два мальчика и одна девочка, то девочек присутствовало 62,5%. Сколько в классе по списку девочек и мальчиков?

Ответ:21 девочка и 14 мальчиков/ **Решение**. См. задачу 7.1.

8.2. Сколько существует дробей $\frac{n}{m}$, обладающих такими свойствами: n и m – двузначные натуральные числа, причём значение дроби не изменится, если к n прибавить 20, а к m прибавить 19?

Ответ: 4. **Решение.** См. задачу 7.3.

8.3. На ребрах куба в некотором порядке расставили числа 1, 2, ..., 12 и для каждой грани подсчитали сумму четырех чисел на ее ребрах. Докажите, что есть грань, для которой эта сумма больше 25.

Решение. Подсчитаем на каждой грани соответствующую сумму и затем сложим эти суммы для всех шести граней. Получим в результате $(1 + 2 + \ldots + 12)\cdot 2$, так как при таком подсчете любое ребро будет засчитано дважды. Итак, общая сумма 156, и тогда хотя бы для одной грани ее сумма не меньше $\frac{156}{6} = 26$. (Действительно, в противном случае мы получили бы общую сумму не больше $25\cdot 6 = 150 < 156$).

8.4. Дан прямоугольный треугольник, у которого высота, опущенная на гипотенузу, в 4 раза меньше гипотенузы. Найдите острые углы этого треугольника.

Ответ: 15° и 75°. **Решение**. Пусть ABC – данный треугольник, CM – высота из вершины C прямого угла и CO – медиана. Рассмотрим прямоугольный треугольник CMO. По свойству медианы из вершины прямого угла $CO = \frac{AB}{2}$, а значит (по условию) CO вдвое больше CM. Поэтому (по свойству прямоугольного треугольника с катетом, равным половине гипотенузы) $\angle COM = 30°$. Тогда, рассматривая равнобедренный ΔCOB с внешним углом COM, получаем $\angle OCB = \angle OBC = 15°$, $\angle CAB = 90° - 15° = 75°$.