8 класс

8.1. Коля хочет представить в десятичной форме дробь $\frac{3}{7}$, записав на доске 0 целых и 1000 знаков после запятой. Затем он собирается стереть 500-й знак после запятой. Какое число у него получится после этого: больше или меньше $\frac{3}{7}$?

Ответ. Больше. **Решение.** См. задачу 7.2

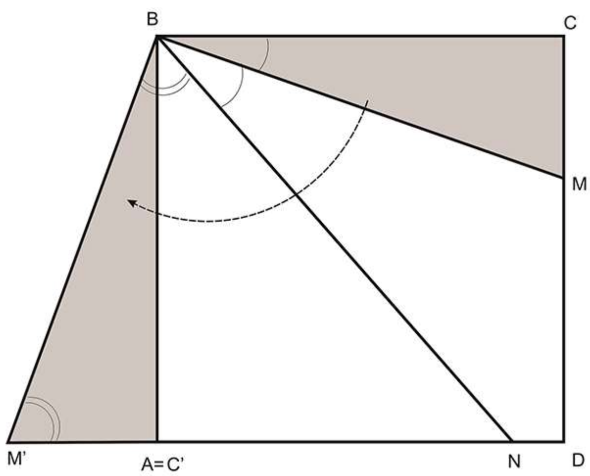
8.2. Найдите все простые числа *p*, для которых 8*p*+1 представляет собой: **а**) точный квадрат? **б**) точный куб?

Ответ.а) *p*=3; **б**) таких *p* не существует. **Решение. а) У**равнению $8p+1 = n^2$ не удовлетворяет *p*=2 и значит, *p* нечетно. Запишем уравнение в виде $(n-1)(n+1) = 8p$. Число в правой части имеет следующие натуральные делители: 1,2,4,8, p, $2p$, $4p$, $8p$. Множители в левой части отличаются на 2 и следовательно, оба четны. Таким образом, остается проверить две пары множителей: $(2;4p)$ и $(4;2p)$. Первая пара не подходит при проверке (т.к. $4p-2>2$). Вторая пара даёт решение $n=5$, $p=3$. **б**) Запишем уравнение в виде $(n-1)(n^2+n+1) = 8p$. Множитель в левой части n^2+n+1 – число нечетное>1 для любого *n* и поэтому (поскольку *p*=2 не подходит) пара множителей в левой части может быть лишь одна, а именно $(8;p)$. Тогда *n*=9 и *p*=91, но 91 – число составное (оно делится на 7) и поэтому искомых *p* не существует.

8.3. *n* фишек с номерами 1, 2,…,*n* расставлены в ряд по возрастанию. За один ход разрешается поменять местами любые две фишки, между которыми стоят ровно две фишки. Существует ли такое *n*, для которого удастся за несколько ходов расставить все фишки в обратном порядке?

Ответ. Не существует. **Решение.** Предположим, от противного, что для некоторого *n* удалось расставить фишки в обратном порядке. Представим, что фишки расположены на координатной прямой в точках с координатами 1,2,..,*n* . При любом ходе у двух фишек, меняющихся местами, координаты изменяются на 3 единицы (у левой фишки координата увеличивается на 3, а у правой уменьшается на 3). Значит, при всех ходах координата любой фиксированной фишки сохраняет тот же остаток при делении на 3, который был вначале. Рассмотрим фишку с номером *n*: вначале у неё координата равнялась *n*, а в конце стала равна 1. Поэтому $n-1$ делится на 3. Аналогично, рассмотрим фишку с номером $n-1$: в конце у неё координата стала равна 2 и поэтому $n-1-2$ делится на 3, т.е. *n* должно быть кратно 3 – противоречие.

8.4.На сторонах *CD* и *AD* квадрата *ABCD* отмечены точки *M* и *N* соответственно. Оказалось, что $CM + AN = BN$. Докажите, что $\angle CBM = \angle MBN$



Решение. Повернём треугольник *BCM* вокруг точки *B* на $90°$ по часовой стрелке (см. рис.) Тогда точка *C* перейдет в точку *A*, а точка *M* – в точку M' на прямой *AD*. Из условия $CM + AN = BN$ следует, что $M'N = BN$, т.е. треугольник $M'NB$ равнобедренный и углы при его основании равны. Обозначим $\alpha = \angle MBN$, $\beta = \angle CBM$. Тогда $\angle BM'N = 90° - \beta = \beta + 90° - (\beta + \alpha) = \angle NBM'$. Отсюда $\alpha = \beta$.

8.5. У Пети есть 4 медных советских монеты – по одной номиналом 1, 2, 3 и 5 копеек. Он узнал из интернета такой факт: эти монеты должны весить ровно столько граммов, каков их номинал. Петя хочет проверить этот факт с помощью чашечных весов. Сможет ли он это сделать, если у него есть всего одна гирька в 9 граммов?

Ответ. Сможет. **Решение.** См. задачу 7.5.