7 класс

7.1. На итоговой контрольной среди седьмых классов школы присутствовало 80 человек. В результате все получили положительные отметки (тройки, четвёрки или пятёрки), а средний балл оказался равен 3,45. Докажите, что четвёрок было четное количество.

Решение. Обозначим через x, y, z количество троек, четверок и пятерок, соответственно. Тогда будем иметь два уравнения: $x+y+z=80$ и $3x+4y+5z=3{,}45\cdot 80=276$. Если из второго уравнения вычесть первое, умноженное на 3, то получим $y+2z=36$. Значит, $y=36-2z$ – четное число.

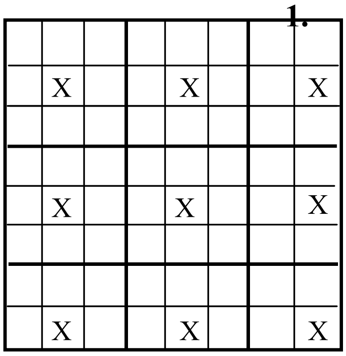
7.2. Петя говорит Коле: «Я расставил некоторые числа в вершинах куба, а затем на каждой грани написал сумму четырёх чисел в ее вершинах. Потом я сложил все шесть чисел на гранях и у меня получилось 2019. Сможешь ли ты узнать, чему равна сумма восьми чисел в вершинах куба?» А как бы вы на месте Коли ответили на этот вопрос?

Ответ: 673. **Решение**. Каждая вершина куба принадлежит трем граням (которые сходятся в этой вершине) и поэтому число, поставленное в этой вершине, участвует трижды при подсчете сумм на гранях. Таким образом, сумма чисел в вершинах равна 2019 : 3 = 673. *Комментарий*: другой способ решения (непосредственный) такой: обозначив 8 неизвестных чисел в вершинах куба и выразив через низ сумму чисел на гранях, после вынесения за скобки тройки, в скобках получим сумму всех чисел в вершинах

7.3. Докажите, что $(n+20)(n+201)(n+2020)$ делится на 6 для любого натурального n.

Решение. Соседние множители $n+20$, $n+201$ имеют разную четность, и поэтому их произведение делится на 2. Далее заметим, что три множителя дают разные остатки при делении на 3, т.к. разность чисел любой пары из этих множителей не делится на 3. Значит, они дают все три остатка, и поэтому среди этих множителей есть кратный 3. Итак, данное произведение делится и на 2 и на 3, т.е. делится на 6. (*Замечание:* делимость на 3 можно также установить, рассмотрев три случая в зависимости от остатка n при делении на 3.)

7.4. Какое наименьшее количество королей надо поставить на шахматную доску так, чтобы они били все не занятые ими клетки? (Король бьёт клетки, соседние с его клеткой по стороне или вершине).



1.

Ответ: .9 королей. **Решение.** На рисунке показано требуемое расположение девяти королей. Докажем, что меньшим числом нельзя обойтись. Действительно, рассмотрим 9 прямоугольных зон, выделенных на рисунке жирными линиями. Если предположить противное, то хотя бы в одной из этих зон нет короля. Но тогда клетка в этой зоне, отмеченная крестиком, не будет побита ни одним королем, находящимся в другой зоне, т.к. эта клетка не граничит с другими зонами.

11 класс

11.1. Решите уравнение $(\sin 2x - \pi \sin x)\sqrt{11x^2 - x^4 - 10} = 0$.

Ответ: $x \in \{-\sqrt{10}, -\pi, -1, 1, \pi, \sqrt{10}\}$. **Решение.** Найдем область определения. Имеем $11x^2 - x^4 - 10 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 10)(x^2 - 1) \leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{10} \leq x \leq -1$ или $1 \leq x \leq \sqrt{10}$. При этом получаем четыре значения $x \in \{-\sqrt{10}, -1, 1, \sqrt{10}\}$, для которых подкоренное выражение обращается в нуль. Первый множитель уравнения $\sin 2x - \pi \sin x = 2\sin x\left(\cos x - \frac{\pi}{2}\right)$ обращается в нуль только при условии $\sin x = 0$ (т.к. $\pi/2 > 1$). Таким образом, $x = k\pi$ $(k \in Z)$, но в область определения попадают лишь два значения, а именно $\pm\pi$ из указанной серии (неравенство $\pi < \sqrt{10}$ следует из неравенств $\pi < 3{,}15$ и $(3{,}15)^2 < 10$).

11.2. Дан прямоугольник с целочисленными координатами вершин на координатной плоскости. Пусть α – угол между его диагоналями. Обязательно ли рациональным числом является **а)** $\cos\alpha$?; **б)** $\sin\alpha$?

Ответ: **а)** да; **б)** да. **Решение**. **а)** Пусть ***ABCD*** – данный прямоугольник и O – его центр. Тогда $\alpha = \angle COD$, $\frac{\alpha}{2} = \angle CAD$. Поскольку $\cos^2\frac{\alpha}{2} = (AD)^2/(AC)^2$ – число рациональное, то $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$ – тоже рациональное число. **б)** Заметим, что $\mathrm{tg}\alpha$ – число рациональное, т.к. α – это угол между прямыми с рациональными угловыми коэффициентами –, скажем, k_1 и k_2, и $\mathrm{tg}\alpha = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$. Поэтому и $\sin\alpha = \cos\alpha \cdot \mathrm{tg}\alpha$ – число рациональное..

11.3. Существует ли такое натуральное n, что число $n^2 + 6n + 2019$ делится на 100?

Ответ: не существует. **Решение**. См. задачу 10.3

11.4. Даны треугольник и четырехугольник, про которые известно следующее: для любых двух углов треугольника найдется угол в четырехугольнике, по величине равный сумме этих двух углов треугольника. Докажите, что треугольник равнобедренный.

Решение. См. задачу 10.4.