11класс

11.1. Решите уравнение $x^{10}-3x^4+x^2+1=0$.

Ответ. $x=\pm1$ **. Решение.** Сделав замену $t=x^2, t\ge 0$, получим уравнение $t^5-3t^2+t+1=0$. Заметив, что t=1 является корнем и разделив левую часть на $(t-1)$, будем иметь $(t-1)(t^4+t^3+t^2-2t-1)=0$. Многочлен $t^4+t^3+t^2-2t-1$ также имеет корень t=1. После деления этого многочлена на $(t-1)$ получаем уравнение $(t-1)^2(t^3+2t^2+3t+1)=0$. Многочлен t^3+2t^2+3t+1 имеет только положительные коэффициенты и поэтому у него нет неотрицательных корней. Таким образом, $t=1$ – единственный корень (кратности 2) и, возвращаясь к переменной x, получаем два корня $x=\pm1$.

11.2. Докажите неравенство $\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\le\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)$ для всех $\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

Решение. В правой части по формуле синуса суммы имеем $\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)$. К левой части применим формулу косинуса двойного угла $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{1+\cos\alpha}}{\sqrt{2}}$(здесь мы учли, что $\cos\frac{\alpha}{2}\ge 0$ при $\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}]$). Тогда исходное неравенство запишется в виде $\sin\alpha\sqrt{1+\cos\alpha}\le\cos\alpha+\sin\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha(\sqrt{1+\cos\alpha}-1)\le\cos\alpha$. Домножив это неравенство на положительное число $\sqrt{1+\cos\alpha}+1$, получим равносильное неравенство $\sin\alpha\cos\alpha\le(\sqrt{1+\cos\alpha}+1)\cos\alpha$. При $\alpha=\frac{\pi}{2}$ последнее неравенство верно (оно принимает вид $0=0$), а при $\alpha\in[0,\frac{\pi}{2})$ поделим его на $\cos\alpha>0$ и получим равносильное неравенство $\sin\alpha\le\sqrt{1+\cos\alpha}+1$, которое очевидно (т.к. $\sin\alpha\le 1$).

11.3. 14 теннисистов сыграли в однокруговом турнире (каждый игрок сыграл с каждым одну партию). Докажите, что найдутся такие три игрока, что каждый из остальных 11 игроков проиграл хотя бы одному из этой тройки. (Ничьих в теннисе не бывает).

Решение. См. задачу 10.3.

11.4. На стороне AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечена точка O . Оказалось, что $AO=BO$, $CO=OD$ и $\angle BOA=\angle COD$. Пусть E – точка пересечения диагоналей четырёхугольника. Докажите, что EO – биссектриса угла AED.

Решение. См. задачу10.4.

11.5. На координатной плоскости построен график $y=\frac{2020}{x}$. Сколько на графике точек, касательная в которых пересекает обе координатные оси в точках с целыми координатами?

Ответ. 40 точек. **Решение**. Уравнение касательной в точке (x_0, y_0) к гиперболе $y=k/x$ имеет вид $y-y_0=-(k/x_0^2)(x-x_0)$, где $y_0=k/x_0$. Из этого уравнения получаются координаты x_1 и y_1 точек пересечения с осями Оx и Оy, а именно, $x_1=2x_0$ и $y_1=2y_0$. Значит, $2x_0$– целое число. Пусть $n=2x_0$. Тогда $y_1=2y_0=2k/x_0=4k/n$. Таким образом, n может принимать значение любого делителя числа $4k$. При k=2020 нам требуется найти количество целых делителей числа $4\cdot 2020=8080=2^4\cdot 5\cdot 101$. Количество натуральных делителей этого числа равно 20=(4+1)(1+1)(1+1) (здесь мы подсчитали количество натуральных делителей, используя степени простых чисел в разложении числа 8080 на простые множители). С учетом отрицательных делителей (соответствующих точкам касания в третьей четверти) получим удвоенное количество, т.е. всего 40 точек.