## 10 класс

**10.1**. Внутри прямоугольника *ABCD* отметили точку *M* и на отрезках *AM*, *BM*, *CM* и *DM* построили как на диаметрах четыре круга. Пусть $S_A, S_B, S_C, S_D$ – соответственно, площади этих кругов. Докажите, что $S_A + S_C = S_B + S_D$.

**Решение**. См. задачу 9.2.

**10.2**. Найдите все значения параметра *a*, для которых уравнение $\sqrt{x^2 - 2x - 3}(x^2 - 3ax + 2a^2) = 0$ имеет ровно три корня.

**Ответ:** $-1 \le a < -\frac{1}{2}$ или $\frac{3}{2} < a \le 3$. **Решение.** Область определения: $x^2 - 2x - 3 \ge 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) \ge 0 \Leftrightarrow$ $x \le -1$ или $x \ge 3$. Числа $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$ уже дают два корня, а третьим корнем корень должен быть тот корень квадратного трехчлена $x^2 - 3ax + 2a^2 = (x-a)(x-2a)$, который лежит вне отрезка [-1, 3]. Если $a = 0$, то корень $x = 0$ не принадлежит области определения. Рассмотрим два случая: $a > 0$ и $a < 0$. В первом случае должны быть выполнены неравенства $\begin{cases} a \le 3 \\ 2a > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2} < a \le 3$. Во втором случае имеем неравенства $\begin{cases} 2a < -1 \\ a \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le a < -\frac{1}{2}$.

**10.3**. Биссектриса *BK* треугольника *ABC* в точке *I* пересечения биссектрис делится в отношении $BI : IK = 10 : 7$. Докажите, что угол *B* острый.

**Решение**. .Пусть $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. По свойству биссектрисы в треугольниках *ABK* и *BCK* имеем: $\frac{AK}{c} = \frac{7}{10} = \frac{KC}{a}$. Обозначим $t = \frac{7}{10}$. Отсюда $AK = ct, KC = at$. Тогда $b = (a+c)t$. Чтобы узнать, является ли угол *B* острым, нужно выяснить знак выражения $a^2 + c^2 - b^2 = a^2 + c^2 - (a+c)^2 t^2$. Поскольку $t^2 = \frac{49}{100} < \frac{1}{2}$, значение в правой части больше, чем $a^2 + c^2 - (a+c)^2 / 2 = (a^2 + c^2 - 2ac)/2 = (a-c)^2 / 2 \ge 0$. Значит, угол *B* – острый.

**10.4**. Сколько существует трехзначных натуральных чисел *n*, для которых число $n^3 - n^2$ является точным квадратом?

**Ответ:** 22**. Решение.** См. задачу 9.4.

## 10 класс

**10.1**. **а)** Докажите, что для любого числа $d > 0$ существует прямоугольный треугольник, длины сторон которого образуют арифметическую прогрессию с разностью $d$. **б)** Докажите, что радиус вписанной окружности такого треугольника равен $d$.

**Решение**. См. задачу 9.1.

**10.2**. Даны числа $a$, $b$ (не обязательно различные) и рассмотрены соответствующие квадратные трехчлены $x^2 + ax + b^2$ и $x^2 + bx + a^2$. Оказалось, что эти трехчлены имеют общий корень. Могут ли $a$ и $b$ быть ненулевыми числами?

**Ответ**: не могут. **Решение**. Пусть $x^2 + ax + b^2 = 0$ и $x^2 + bx + a^2 = 0$, где $x$. – общий корень. Вычитая эти равенства, получим $(a - b)(x - a - b) = 0$. Если $a = b$, то $x^2 + ax + a^2 += 0$, но дискриминант данного уравнения $D = -3a^2$ отрицательный при $a \neq 0$. Если же $x = a + b$, то $(a + b)^2 + a(a + b) + b^2 = 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 3ab + 2b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0,\ b = 0$ (т.к. у этого квадратного трехчлена переменной $a$ дискриминант $D = -7b^2 < 0$ при $b \neq 0$).

**10.3**. Существует ли такое натуральное $n$, что число $n^2 + 6n + 2019$ делится на 100?

**Ответ:** не существует. **Решение**. См. задачу 9.4.

**10.4**. Даны треугольник и четырехугольник, про которые известно следующее: для любых двух углов треугольника найдется угол в четырехугольнике, по величине равный сумме этих двух углов треугольника. Докажите, что треугольник равнобедренный.

**Решение.** .Пусть $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ – углы треугольника. Если предположить, от противного, что все эти углы различны, то числа $(\alpha + \beta)$, $(\beta + \gamma)$ и $(\alpha + \gamma)$ все будут различными, и в четырехугольнике будет три разных вершины с такими углами. Сумма этих трех углов равна $2\cdot180° = 360°$, но это противоречит тому, что в четырехугольнике сумма всех четырех углов равна $360°$.